



Tradução Técnica

■ Excerto 5: escoamento de Hagen-Poiseuille

■ Excerpt 5: Hagen-Poiseuille flow

◆ Lucas Monteiro Nogueira

Nº	Título	Idioma	Referência
1	Reynolds tall (Número de Reynolds)	Norueguês → Português	Olsen (2019)
2	Flujo de Hagen-Poiseuille em tuberías (Escoamento de Hagen-Poiseuille em tubos)	Espanhol → Português	Çengel e Cimbala (2018)
3	Spezielle Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen (Soluções especiais das equações de Navier-Stokes)	Alemão → Português	Zierep e Bühler (2018)

◆ Referências

1. Olsen, N.R.B. (2019). *TVM 4116: Hydromekanikk* [Notas]. Disponível em: <https://www.ntnu.no/studier/emner/TVM4116#tab=omEmnet>
2. Çengel, Y.A. e Cimbala, J.M. (2018). *Mecánica de Fluidos: Fundamentos y Aplicaciones*. 4ª edição. McGraw-Hill.
3. Zierep, J. e Bühler, K. (2018). *Grundzüge der Strömungslehre*. 11ª edição. Springer.

◆ Índice

1. Reynolds tall

2. Flujo de Hagen-Poiseuille en tuberías

2.1. El perfil parabólico

2.2. La ecuación de Poiseuille

3. Spezielle Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

3.1. Ausgebildete laminare Spaltströmung

3.2. Rayleigh-Stokessches Problem für die Platte

◆ 1. Reynolds tall

↳ Referência 1 (Olsen, 2019), pp. 13 – 15. Com modificações.

Siden strømme i noen av ledningsformer vi bruker oppfører seg forskjellig avhengig av om strømmen er laminær eller turbulent, trenger vi en metode for å finne ut når vi har hvilken strømning. Reynolds gjorde endel eksperimenter for å finne ut av disse. Reynolds fant ut at man kunne bruke en dimensjonsløs parameter, som har blitt kalt Reynolds tall. Den er definert som:

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (1)$$

L er en karakteristisk lengde, for eksempel vanddybden i en elv, eller diameteren på et rør. U er gjennomsnittshastigheten over tverrsnittet. Den **kinematiske viskositeten**, ν , er gitt som en funksjon av temperaturen til vannet. Hvis en ikke vet temperaturen, kan en anta at viskositeten er $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Det Reynolds fant ut var at det blir turbulent strømning for $Re > 2500$, og laminær strømning for $Re < 2000$. I området mellom 2000 og 2500 er det litt usikkert hva slags type strømning vi har. Dette er vanligvis ikke noe stort problem, da Reynoldstallet varierer over mange størrelseordner. I alle naturlige elver, vanntunneler, avløpsrør og vannkrafttrør vil vi ha turbulent strømning. Turbulent strømning betyr at en ofte kan anta tilnærmet konstant hastighetsfordeling over tverrsnittet i rør/kanaler. Laminær strømning opptrer oftest i fysiske modeller eller i rør med veldig små dimensjoner og lave hastigheter.

Eksempel. Vann ved 20°C renner med gjennomsnittshastigheten 0.2 m/s i et rør av 0.1 meter diameter. Er det turbulent eller laminær strømning i røret?

Svar. Kinematisk viskositeten av vann ved 20°C er ca. $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Vi har også $d = 0.1 \text{ m}$ og $U = 0.2 \text{ m/s}$. Følger

$$\text{Re}_d = \frac{Ud}{\nu} = \frac{0.2 \times 0.1}{10^{-6}} = 20,000$$

Siden Reynolds tallet er større enn 2500, er strømningen turbulent.

1. Número de Reynolds

Uma vez que escoamentos em algumas geometrias de conduto que utilizamos têm comportamentos diferentes para condições laminares ou turbulentas, precisamos de um método para estabelecer quando ocorre cada tipo de escoamento. Com esse intento, Reynolds realizou certos experimentos e lançou mão de um parâmetro adimensional que hoje é chamado número de Reynolds. Este é definido como

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (1)$$

onde L é um comprimento característico como a profundidade de um rio ou o diâmetro de um tubo, U é a velocidade média de escoamento na seção transversal do conduto e ν é a **viscosidade cinemática** do fluido; esta varia em função da temperatura e, para a água, pode ser tomada como $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ na ausência de valores específicos.

Reynolds verificou que um escoamento turbulento ocorre se $Re > 2500$ ao passo que um escoamento laminar prevalece se $Re < 2000$. Na região entre $Re = 2000$ e 2500 há certa incerteza a respeito de qual será o escoamento vigente. Isso não é um grande problema, pois o número de Reynolds em geral varia em muitas ordens de magnitude. Escoamentos turbulentos ocorrem em rios, tubos de drenagem e comportas de instalações hidrelétricas. Na presença de um escoamento turbulento é possível supor uma distribuição de velocidades aproximadamente constante sobre a seção do tubo ou canal. Por sua vez, escoamentos laminares ocorrem em modelos físicos ou tubos de pequenas dimensões carregando fluidos a baixa velocidade.

Exemplo. Água a 20°C escoam com velocidade 0.2 m/s em um tubo de 0.1 m de diâmetro. O escoamento no tubo é laminar ou turbulento?

Resposta. A viscosidade cinemática da água a 20°C pode ser tomada como aproximadamente $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Temos também $d = 0.1 \text{ m}$ e $U = 0.2 \text{ m/s}$. Segue que

$$Re_d = \frac{Ud}{\nu} = \frac{0.2 \times 0.1}{10^{-6}} = 20,000$$

Já que o número de Reynolds é maior que 2500 , o escoamento é turbulento.

▲ Termos importantes

■ **Kinemastiske viskositeten** ("Viscosidade cinemática"): Propriedade termomecânica dada pela razão entre viscosidade dinâmica (geralmente denotada por μ ou η) e a densidade do fluido (ρ). Costuma-se denotá-la com a letra grega nu (ν). A viscosidade cinemática possui dimensões L^2T^{-1} e está para o transporte de momento assim como a difusividade térmica α está para o transporte de calor; de fato, algumas fontes mais antigas utilizam o termo 'difusividade de momento' para definir essa propriedade.

◆ 2. Flujo de Hagen-Poiseuille em tuberías

↳ Referência 2 (Çengel e Cimbala, 2018), pp. 355 – 358. Com modificações.

2.1. El perfil parabólico

Quando la ecuación de Navier-Stokes es aplicada al flujo laminar, estacionario, horizontal y totalmente desarrollado de uno fluido newtoniano incompresible en una tubería, se obtiene

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} \quad (2)$$

donde μ es la viscosidad del fluido, P es la presión del flujo, x es la posición axial a lo largo del tubo, r es la distancia radial desde la línea central del tubo y u es la velocidad axial del flujo.

El lado izquierdo de la ecuación anterior es función de r y el lado derecho es función de x . La igualdad se debe sostener para cualquier valor de r y x , y una igualdad de la forma $f(r) = g(x)$ sólo se puede satisfacer si tanto $f(r)$ como $g(x)$ son iguales a la misma constante. Por lo tanto, se concluye que $dP/dx = \text{constante}$. La ecuación diferencial **(2)** puede ser resuelta integrando dos veces consecutivas, de modo que

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (3)$$

El **perfil de velocidad** $u(r)$ se obtiene cuando se aplican las condiciones de frontera $\partial u/\partial r = 0$ en $r = 0$ (debido a la simetría em torno a la línea central) y $u = 0$ en $r = R$ (la **condición de no-deslizamiento** en la superficie de la tubería). Se obtiene

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (4)$$

El perfil de velocidad em flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería es *parabólico* con un máximo en la línea central y mínimo (cero) en la pared de la tubería (Figura 1). Además, la velocidad axial u es positiva para cualquier r , y por lo tanto el gradiente de presión axial dP/dx debe ser negativo (es decir: la presión debe disminuir en la dirección del flujo debido a efectos viscosos).

La velocidad promedio para flujo incompresible en una tubería circular de radio R se puede expresar como

$$V_{\text{prom}} = \frac{\int_A \rho u(r) dA_c}{\rho A_c} = \frac{\int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr \quad (5)$$

donde usamos $A_c = \pi R^2$, la area de la sección circular, y ρ , que es la densidad del fluido. Sustituyendo la expresión para $u(r)$ (Eq. **(4)**) e realizando la integración, obtenemos

$$V_{\text{prom}} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr = -\frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr$$

$$\therefore V_{\text{prom}} = -\frac{R^2}{8} \left(\frac{dP}{dx} \right) \quad (6)$$

Cuando se combinan **(4)** y **(6)**, el perfil de velocidad se reescribe como

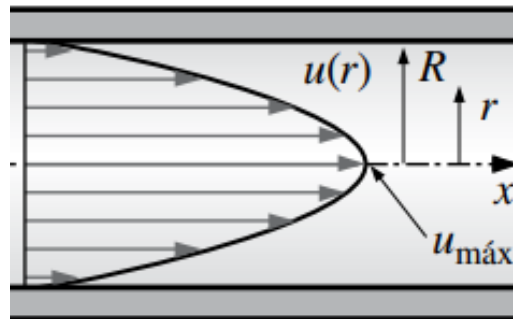
$$u(r) = 2V_{\text{prom}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (7)$$

La velocidad máxima ocurre en la línea central y se determina sustituyendo $r = 0$ en **(7)**,

$$V_{\text{max}} = 2V_{\text{prom}} \left(1 - \frac{0^2}{R^2} \right) = 2V_{\text{prom}} \quad (8)$$

En consecuencia, la velocidad promedio es la mitad de la velocidad máxima.

Figura 1. Perfil de velocidad – Flujo de Hagen-Poiseuille.



2.1. O perfil parabólico

Quando a equação de Navier-Stokes é aplicada ao escoamento laminar, estacionário, horizontal e totalmente desenvolvido de um fluido newtoniano incompressível em um tubo circular, obtém-se

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} \quad (2)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido, P é a pressão do escoamento, x é a posição axial ao longo do tubo, r é a distância radial a partir do eixo do tubo e u é a velocidade axial do escoamento.

O lado esquerdo da equação **(2)** é função de r e o lado direito é função de x . Essa igualdade deve ser válida para quaisquer valores de r e x , mas uma igualdade da forma $f(r) = g(x)$ só pode ser satisfeita se tanto $f(r)$ como $g(x)$ forem iguais à mesma constante. Portanto, concluímos que $dP/dx = \text{constante}$. Para resolver a equação **(2)**, integramos duas vezes consecutivas e obtemos

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (3)$$

O **perfil de velocidades** $u(r)$ é obtido ao aplicar as condições de contorno $\partial u/\partial r = 0$ em $r = 0$ (devido à simetria em torno do eixo do tubo) e $u = 0$ em $r = R$ (a **condição antideslizamento** na parede do tubo). Obtemos então

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (4)$$

O perfil de velocidades em um escoamento laminar totalmente desenvolvido é *parabólico* (Figura 1) com valor máximo na linha central do tubo e valor mínimo (zero) na parede do tubo. Ademais, a velocidade axial u é positiva para qualquer r , portanto o gradiente de pressão axial dP/dx deve ser negativo (ou seja, a pressão deve diminuir na direção do escoamento devido a efeitos viscosos).

A velocidade média para escoamento incompressível em um tubo circular de raio r pode ser escrita como

$$V_{\text{med}} = \frac{\int_A \rho u(r) dA_c}{\rho A_c} = \frac{\int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr \quad (5)$$

onde usamos $A_c = \pi R^2$, que é a área da seção circular, e ρ , que é a densidade do fluido. Substituindo (4) e realizando a integração em (5), obtemos

$$V_{\text{med}} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr = -\frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr$$

$$\therefore V_{\text{med}} = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) \quad (6)$$

Combinando (4) e (6), o perfil de velocidades pode ser escrito como

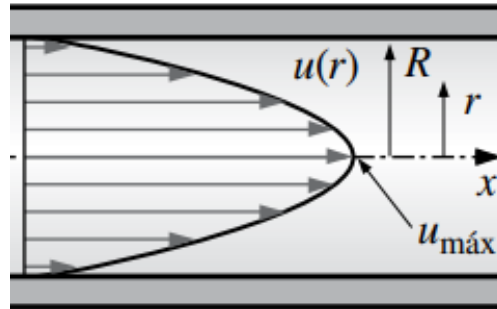
$$u(r) = 2V_{\text{med}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (7)$$

A velocidade máxima ocorre na linha central e pode ser obtida substituindo $r = 0$ em (6),

$$V_{\text{max}} = 2V_{\text{med}} \left(1 - \frac{0^2}{R^2} \right) = 2V_{\text{med}} \quad (8)$$

Concluimos que a velocidade média é igual a metade da velocidade máxima.

Figura 1. Perfil de velocidades – Escoamento de Hagen-Poiseuille.



▲ Termos importantes

■ **Perfil de velocidade** (“Perfil de velocidades”): Distribuição de certo componente do campo de velocidades de um escoamento ao longo da seção transversal ou outra área pertinente. O perfil de velocidades axiais em um escoamento de Hagen-Poiseuille é um parabolóide de revolução simétrico em relação ao eixo do tubo.

■ **Condição de no-deslizamento** (“Condição antideslizamento”): Princípio de certos escoamentos segundo o qual a velocidade relativa de um fluido newtoniano em uma superfície sólida deve ser nula.

2.2. La ecuación de Poiseuille

Un elemento de interés en el análisis del flujo en una tubería es la caída de presión ΔP , porque está directamente relacionada con la potencia necesaria para que el ventilador o bomba mantengan el flujo. Note que $dP/dx = \text{constante}$ y cuando se integra de $x = x_1$, donde la presión es P_1 , hasta $x = x_1 + L$, donde la presión es P_2 , produce:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L} \quad (9)$$

Pero en (6), la caída de presión se expresa como:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu LV_{\text{prom}}}{R^2} = \frac{32\mu LV_{\text{prom}}}{D^2} \quad (10)$$

En la práctica, es conveniente expresar la pérdida de presión para todos los tipos de flujos internos totalmente desarrollados (flujos laminares o turbulentos, en tuberías circulares o no-circulares, con superficies lisas o rugosas, en tuberías horizontales o inclinadas), como

$$\Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{\text{prom}}^2}{2} \quad (11)$$

donde $\rho V_{\text{prom}}^2/2$ es la *presión dinámica* y f es el **factor de fricción de Darcy-Weisbach**.

En el análisis de los sistemas de tuberías, las pérdidas de presión comúnmente se expresan en términos de la altura de la columna de fluido equivalente, llamada pérdida de carga, h_L . Note a partir de la estática de fluidos que $\Delta P = \rho gh$, por lo tanto, una diferencia de presión ΔP corresponde a una altura de fluido de $h = \Delta P/\rho g$; la *pérdida de carga de tubería* se obtiene cuando se divide ΔP_L entre ρg para dar:

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V_{\text{prom}}^2}{2g} \quad (12)$$

La pérdida de carga h_L representa la altura adicional que el fluido necesita para elevarse por medio de una bomba con la finalidad de superar las pérdidas por fricción en la tubería. La pérdida de carga se produce por la viscosidad y se relaciona directamente con el esfuerzo de corte de la pared del tubo.

Cuando se conoce la pérdida de presión (o la pérdida de carga), la potencia de bombeo necesaria para superar la pérdida de carga se determina a partir de:

$$\dot{W}_{\text{bombeo}} = Q\Delta P = Q\rho gh_L = \dot{m}gh_L \quad (13)$$

donde Q es el flujo volumétrico y \dot{m} es la razón de flujo de masa. La velocidad promedio del flujo laminar en una tubería horizontal es, a partir de la ecuación (6),

$$V_{\text{prom}} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} = \frac{(P_1 - P_2)D^2}{32\mu L} = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L} \quad (14)$$

Entonces, la razón de flujo volumétrico de flujo laminar en una tubería horizontal de diámetro D y longitud L se convierte en:

$$Q = V_{\text{prom}} A_c = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} \times \pi R^2 = \frac{(P_1 - P_2)\pi D^4}{128\mu L} = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L} \quad (15)$$

Esta ecuación se conoce como **ley de Poiseuille**; este flujo se llama *flujo Hagen-Poiseuille* en honor a los trabajos en la materia de G. Hagen (1797 – 1884) y J. Poiseuille (1799 – 1869). Note en la ecuación (15) que, para un flujo volumétrico especificado, la caída de presión y, por lo tanto, la potencia de bombeo necesaria, es proporcional a la longitud de la tubería y a la viscosidad del fluido, pero es inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio (o diámetro) de la tubería. En consecuencia, la potencia de bombeo necesaria para mantener un flujo laminar en un sistema de tuberías se puede reducir por un factor de 16 cuando se duplica el diámetro de la tubería.

2.2. A equação de Poiseuille

Um elemento de interesse na análise do escoamento em um tubo é a queda de pressão ΔP , pois esta tem relação com a potência necessária para que um propulsor ou bomba mantenha seu escoamento operacional. Notando que $dP/dx = \text{constante}$, podemos integrar de $x = x_1$, onde a pressão é P_1 , até $x = x_1 + L$, onde a pressão é P_2 , produzindo:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L} \quad (9)$$

Mas em (6), a queda de pressão se expressa como:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu L V_{\text{med}}}{R^2} = \frac{32\mu L V_{\text{med}}}{D^2} \quad (10)$$

Na prática, é conveniente exprimir a queda de pressão para todos os tipos de escoamentos internos totalmente desenvolvidos (escoamentos laminares e turbulentos, em tubos circulares ou não-circulares, com superfícies lisas ou rugosas, em tubos horizontais ou inclinados), como

$$\Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{\text{prom}}^2}{2} \quad (11)$$

onde ρ é a densidade do fluido, $\rho V_{\text{med}}^2/2$ é a chamada *pressão dinâmica* e f é o *fator de atrito de Darcy-Weisbach*.

Na análise de sistemas de tubos, as quedas de pressão são comumente expressadas em termos da altura da coluna de fluido equivalente, denominada perda de carga, h_L . A partir de estática de fluidos, note que $\Delta P = \rho gh$, portanto uma diferença de pressão ΔP corresponde a uma altura de fluido $h = \Delta P/\rho g$; a *perda de carga de uma tubulação* é obtida por meio da divisão de ΔP_L por ρg , o que resulta em:

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V_{\text{prom}}^2}{2g} \quad (12)$$

A perda de carga h_L representa a altura adicional que o fluido necessita para ser elevado, através da potência fornecida por uma bomba, com o fim de superar as perdas por atrito ao longo da tubulação. A perda de carga é ocasionada por efeitos viscosos e tem relação direta com a tensão de cisalhamento na parede do tubo.

Conhecendo a queda de pressão (ou a perda de carga), a potência de bombeamento necessária para superar a perda de carga é determinada a partir de:

$$\dot{W}_{\text{bombeo}} = Q\Delta P = Q\rho gh_L = \dot{m}gh_L \quad (13)$$

onde Q é a vazão volumétrica e \dot{m} é a vazão mássica. A velocidade média do escoamento laminar em uma tubulação horizontal é, usando a equação (6),

$$V_{\text{prom}} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} = \frac{(P_1 - P_2)D^2}{32\mu L} = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L} \quad (14)$$

Então, a vazão volumétrica para um escoamento laminar em uma tubulação horizontal de diâmetro D e comprimento L torna-se:

$$Q = V_{\text{prom}} A_c = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} \times \pi R^2 = \frac{(P_1 - P_2)\pi D^4}{128\mu L} = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L} \quad (15)$$

Essa equação é conhecida como **lei de Poiseuille**; o escoamento correspondente é chamado *escoamento de Hagen-Poiseuille* em honra de G. Hagen (1797 – 1884) e J. Poiseuille (1799 – 1869). Note na equação (15) que, para um escoamento volumétrico especificado, a queda de pressão e, portanto, a potência de bombeio necessária é proporcional ao comprimento da tubulação e à viscosidade do fluido, mas é inversamente proporcional à quarta potência do raio (ou diâmetro) do tubo. Por conseguinte, ao duplicarmos o diâmetro de uma tubulação, a potência de bombeamento necessária para manter um escoamento laminar na tubulação torna-se 16 vezes menor.

▲ Termos importantes

■ **Factor de fricción de Darcy-Weisbach** (“Fator de atrito de Darcy-Weisbach”): Coeficiente adimensional usado no cálculo da queda de pressão ocasionada por efeitos viscosos em um escoamento interno.

■ **Ley de Poiseuille** (“Lei de Poiseuille”): Equação que relaciona a vazão Q , a queda de pressão ΔP , a viscosidade dinâmica μ , o comprimento L e o diâmetro (D) (ou raio R) em um escoamento laminar ao longo de um conduto cilíndrico.

◆ 3. Spezielle Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

↳ Referência 3 (Zierep e Bühler, 2018), pp. 152 – 157. Com modificações.

3.1. Ausgebildete laminare Spaltströmung

Wir setzen eine ausgebildete Schichtenströmung eines inkompressiblen Mediums im ebenen Spalt ($-h \leq y \leq +h$, $-\infty \leq x \leq \infty$) voraus (Abb. 2). Dies ergibt $v = w = 0$ und $u = u(y)$. Die Kontinuitätsgleichung ist erfüllt. Es kommt bei Vernachlässigung der Schwere

$$1. \text{Navier-Stokes-Gleichung: } \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{d^2 u(y)}{dy^2} \quad (16.1)$$

$$2. \text{ und } 3. \text{ Navier-Stokes-Gleichung: } \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (16.2)$$

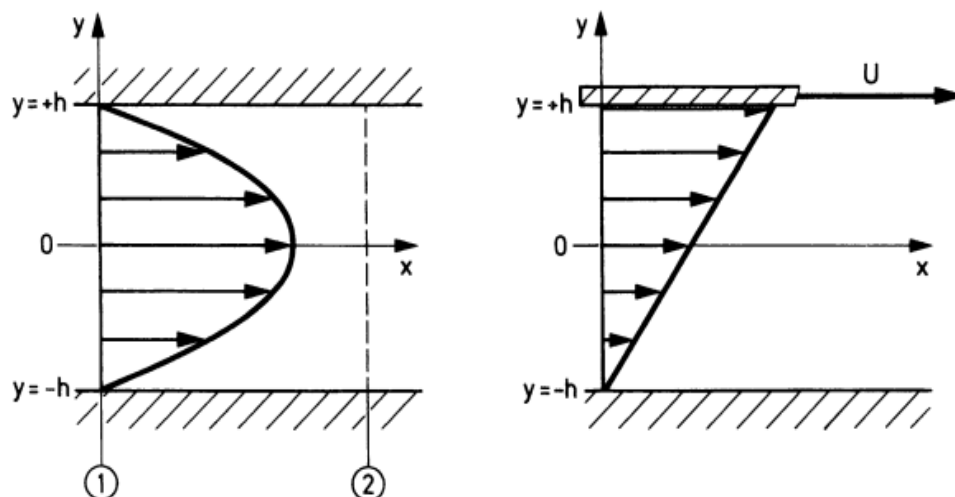
Die letzten beiden Aussagen ergeben $p = p(x)$. Der Druck ist im Spalt quer zur Strömung konstant. Dies erinnert an das Grenzschichtkonzept. Hier ist sozusagen der ganze Spalt mit Grenzschicht ausgefüllt. **(16.1)** führt mit $p = p(x)$ sofort zu

$$\frac{dp}{dx} = \text{Konst.} \quad ; \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = \text{Konst.} \quad (17.1, 2)$$

Das heißt, der Druckgradient ist konstant, und für $u(y)$ kommt eine sehr einfache, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zweimalige Integration ergibt

$$u(y) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{y^2}{2} + Ay + B \quad ; \quad A, B = \text{Konst.} \quad (18)$$

Abb. 2. Poiseuille- und Couette-Strömung im ebenen Spalt.



Für die Poiseuille-Strömung ($u(\pm h) = 0$) kommt der parabolische Verlauf

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\eta} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) = u_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (19)$$

(welche er identisch mit parabolische Profil **(6)**). Dagegen erhalten wir für die **Couette-Strömung** ($u(-h) = 0, u(+h) = U, dp/dx = 0$) die lineare Funktion

$$u(y) = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \quad (20)$$

Wir bestimmen wie dort den Volumenstrom und die Durchschnittsgeschwindigkeit (b ist die Breitenstreckung der Strömung):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= u_m \times 2hb = b \int_{-h}^h u dy = bu_{\max} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) dy = bu_{\max} \times \frac{4h}{3} \\ \therefore u_m \times 2hb &= u_{\max} \times \frac{4hb}{3} \\ \therefore u_m &= \frac{2u_{\max}}{3} \quad (21) \end{aligned}$$

Für den Druckabfall auf der Spaltlänge ℓ kommt damit

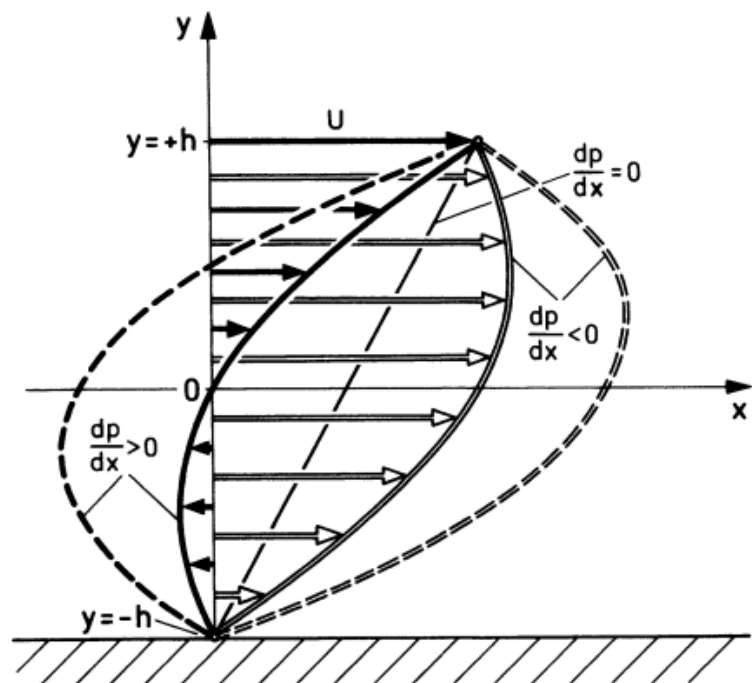
$$\Delta p = \frac{\rho u_m^2}{2} \times \frac{\ell}{2h} \frac{24}{\text{Re}_{2h}} \quad ; \quad \left(\text{Re}_{2h} = \frac{u_m 2h}{\nu} \right) \quad (22)$$

Dasselbe Ergebnis liefert der Impulssatz. Der Leser bestätige dies. Die beiden Lösungen **(19)** und **(20)** lassen linear überlagern, weil in diesem Spezialfall die konvektiven Glieder fortfallen und damit die Navier-Stokes-Gleichungen linear sind:

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\eta} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \quad (23)$$

Die obere Berandung des Spaltes wird mit der Geschwindigkeit U bewegt, die untere ruht. Dem ganzem Stromfeld ist der Druckgradient $dp/dx \leq 0$ aufgeprägt. In Abhängigkeit von der Größe von dp/dx ergeben sich interessante Geschwindigkeitsverteilungen. Es kann z.B. zu Rückströmungen in der Nähe der ruhenden Wand kommen. Hier reicht der Antrieb der oberen Berandung offenbar nicht aus, den Druckanstieg im ganzen Spalt zu überwinden (Abb. 3). Die Lösung **(23)** beschreibt z.B. die Strömung im Schmierspalt zwischen Welle und Lagerschale, wenn man die Krümmung des Spaltes vernachlässigt (kleine Spaltweiten). Dort bildet sich die Druckverteilung aufgrund der Spaltgeometrie aus, d.h. sie wird durch den veränderlichen Abstand von Welle und Lager aufgebaut.

Abb. 3. Überlagerung von Poiseuille- und Couette-Strömung im ebenen Spalt mit Rückströmung.



3.1. Soluções especiais das equações de Navier-Stokes

Consideramos aqui o escoamento estratificado de um meio incompressível em uma lacuna plana ($-h \leq y \leq +h$, $-\infty \leq x \leq \infty$) (Figura 2). Tem-se $v = w = 0$ e $u = u(y)$. A equação de continuidade é satisfeita e pode ser obtida ao desprezar efeitos gravitacionais, o que resulta em

$$1. \text{Equação de Navier-Stokes 1: } \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{d^2 u(y)}{dy^2} \quad (16.1)$$

$$2. \text{ e } 3. \text{Equações de Navier-Stokes 2 e 3: } \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (16.2)$$

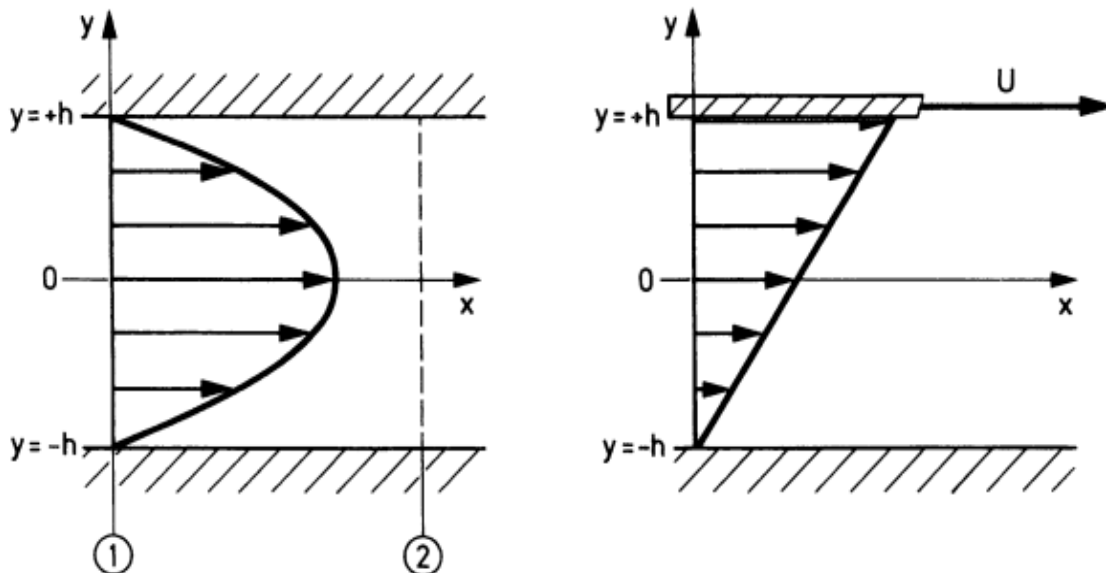
A última expressão indica que $p = p(x)$, isto é, o gradiente de pressão é uma função de x apenas e pode ser considerado constante na direção perpendicular à lacuna. Isso nos lembra do conceito de camada limite; de fato, pode-se afirmar que toda a lacuna está preenchida com uma camada limite. Usando **(16.1)**, chegamos aos resultados

$$\frac{dp}{dx} = \text{Const.} \quad ; \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = \text{Const.} \quad (17.1, 2)$$

Já discutimos **(9.1)**; por sua vez, **(9.2)** é uma equação diferencial de segunda ordem que pode ser resolvida por integração, resultando em

$$u(y) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{y^2}{2} + Ay + B \quad ; \quad A, B = \text{Const.} \quad (18)$$

Figura 2. Escoamentos de Poiseuille e Couette em uma lacuna plana.



Para um escoamento de Poiseuille ($u(\pm h) = 0$) temos o perfil parabólico

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\eta} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) = u_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (19)$$

(que é idêntico ao perfil parabólico **(6)**). Por outro lado, para um **escoamento de Couette** ($u(-h) = 0$, $u(+h) = U$, $dp/dx = 0$) obtemos a função linear

$$u(y) = \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \quad (20)$$

Determina-se a vazão e a velocidade média como (b é a largura do escoamento)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= u_m \times 2hb = b \int_{-h}^h u dy = bu_{\max} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) dy = bu_{\max} \times \frac{4h}{3} \\ \therefore u_m \times 2hb &= u_{\max} \times \frac{4hb}{3} \\ \therefore u_m &= \frac{2u_{\max}}{3} \quad (21) \end{aligned}$$

Para a queda de pressão ao longo de um comprimento horizontal ℓ , vem

$$\Delta p = \frac{\rho u_m^2}{2} \times \frac{\ell}{2h} \frac{24}{\text{Re}_{2h}} \quad ; \quad \left(\text{Re}_{2h} = \frac{u_m 2h}{\nu} \right) \quad (22)$$

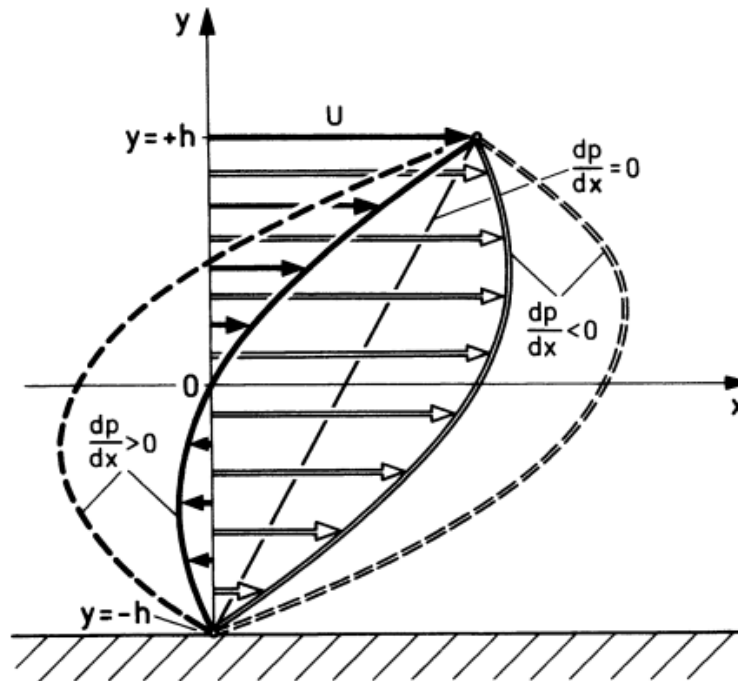
O leitor pode confirmar que a equação de momento fornece o mesmo resultado. As duas soluções **(19)** e **(20)** podem ser sobrepostas linearmente; nesse caso especial os termos de convecção são omitidos e, portanto, as equações de Navier-Stokes são lineares:

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\eta} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \quad (23)$$

A fronteira superior da lacuna move-se com velocidade U ao passo que a fronteira inferior permanece estacionária. Um gradiente de pressão $dp/dx \lesseqgtr 0$ é aplicado sobre todo o campo de escoamento. Distribuições de velocidade interessantes são obtidas com diferentes magnitudes de dp/dx . Por exemplo, refluxos podem ocorrer na vizinhança da placa em repouso; nesse caso a fronteira superior claramente não é suficiente para superar o aumento de pressão em toda a lacuna (Figura 3). A solução **(23)** descreve, por exemplo, o escoamento na lacuna lubrificante entre um eixo e um casquilho, supondo que a curvatura da lacuna pode ser desprezada (lacunas de pequena espessura). Nesse caso a distribuição

de pressão desenvolve-se devido à geometria da lacuna, isto é, a distribuição de pressão resulta da distância variável entre eixo e casquilho.

Figura 3. Superposição de escoamentos de Poiseuille e Couette em uma lacuna plana com escoamento reverso.



3.2. Rayleigh-Stokessches Problem für die Platte

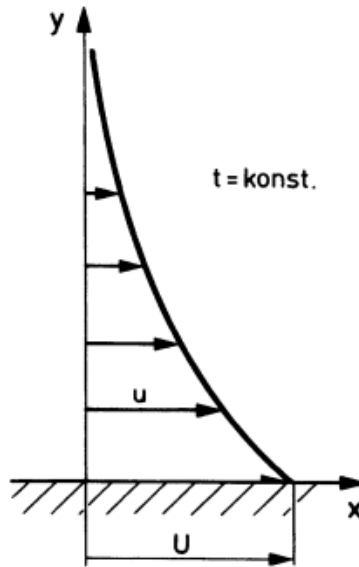
Die soeben behandelte Spaltströmung schloss unmittelbar an die früher berechnete Rohrströmung an. Jetzt diskutieren wir eine ganz andere Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen, die uns direkt zur Behandlung der Grenzschichttheorie führen wird.

Eine unendlich ausgedehnte horizontale Platte wird in einer ruhenden Umgebung ruckartig auf die Geschwindigkeit U gebracht. Durch den Reibungseinfluss wird das über der Platte befindliche Fluid allmählich mitgenommen (Abb. 4). Der Reibungseinfluss breitet sich im Laufe der Zeit immer weiter in Querrichtung (y) aus, mit anderen Worten: Die Grenzschicht wächst mit der Zeit an. Wir bestimmen nun ihre Dicke. Die Strömung ist ausgebildet, so dass jede Ableitung nach x verschwindet und $v = 0$ ist. Es verbleibt damit $u = u(y, t)$. Die Anfangsrandbedingungen des Problems sind

$$\begin{cases} t \leq 0: & u = 0, y \geq 0 \\ t > 0: & u(0, t) = U, u(\infty, t) = 0 \end{cases} \quad (24.1, 2)$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen ergeben bei Elimination der Schwere

Abb. 4. Rayleigh-Stokes-Strömung für die ruckartig Platte.



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (25.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (25.2)$$

Der Druck ist also quer zur Strömungsrichtung konstant. Diese charakteristische Eigenschaft der Grenzschichten ist hier exakt erfüllt. **(25.1)** ist vom Typ der Wärmeleitungsgleichung und kann unter den Bedingungen **(24.1, 24.2)** leicht gelöst werden. Wir fassen y und t zu der neuen, dimensionslosen Variablen

$$\frac{y}{\sqrt{\nu t}} = s \quad (26)$$

zusammen. **(25.1)** und **(24.1, 24.2)** gehen dann für

$$\frac{u(y,t)}{U} = f(s) \quad (27)$$

über in die gewöhnliche Differentialgleichung mit den folgenden Randbedingungen:

$$f''(s) + \frac{s}{2} f'(s) = 0 ; [f(0) = 1, f(\infty) = 0] \quad (28)$$

Als Lösung erhalten wir die Fehlerfunktion

$$\frac{u(y,t)}{U} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{vt}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) \quad (29)$$

Es ergibt sich ein einziges Geschwindigkeitsprofil, das von der Variablen $y/(2\sqrt{vt})$ abhängt (Abb. 5). Hieraus kann für jeden Wandabstand y zu jeder Zeit t die Geschwindigkeit bestimmt werden. Wir wollen mit (29) die Dicke δ derjenigen Fluidschicht bestimmen, die bei der Bewegung der Platte mitgenommen wird. Für $y = \delta$ sei $u/U = 0.01$. (29) liefert hierfür

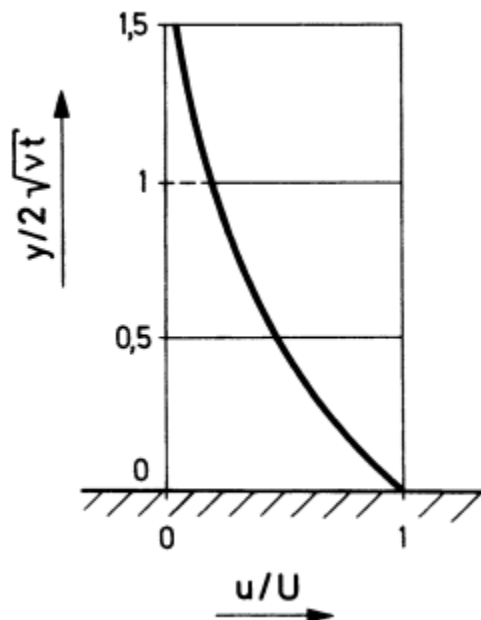
$$\delta \approx 4\sqrt{vt} \quad (30)$$

Diese Schichtdicke nimmt also, wie zu erwarten, mit der Zeit zu. Für Reibungs- und Wärmeleitungsvorgänge ist die Wurzelabhängigkeit charakteristisch. Geht man von der Zeit zu der Länge $\ell = t \times U$ über, so wird

$$\frac{\delta}{\ell} \approx \frac{4}{\sqrt{\frac{U\ell}{\nu}}} = \frac{4}{\sqrt{\operatorname{Re}_\ell}} \quad (31)$$

Damit ergibt sich zwangsläufig ein Zugang zur Grenschichttheorie, denn δ kann als Reibungsschichtdicke und ℓ als zugehörige Lauflänge aufgefasst werden. Es tritt die für laminare Grenzschichten typische Abhängigkeit $\sim 1/\sqrt{\operatorname{Re}_\ell}$ auf, die uns später immer wieder begegnen wird.

Abb. 5. Universelles Geschwindigkeitsprofil bei der bewegten Platte.



3.2. Problema da placa móvel de Rayleigh-Stokes

O escoamento de placas paralelas considerado acima resulta da teoria de escoamento em tubos. Discutimos agora uma diferente solução das equações de Navier-Stokes; tal solução conduz diretamente ao tratamento da teoria de camadas limite.

Uma placa horizontal infinita em um ambiente estacionário é acelerada até atingir uma velocidade U . Devido à influência do atrito, o fluido situado acima da placa é gradualmente arrastado (Figura 4). A influência do atrito se propaga progressivamente na direção transversal (y) ao longo do tempo, ou, em outras palavras, a camada limite cresce com o tempo. Busca-se determinar a espessura da camada. O escoamento é estruturado de modo que todas as derivadas com relação a x desaparecem e $v = 0$. Isso nos deixa com $u = u(y,t)$. As condições iniciais do problema são:

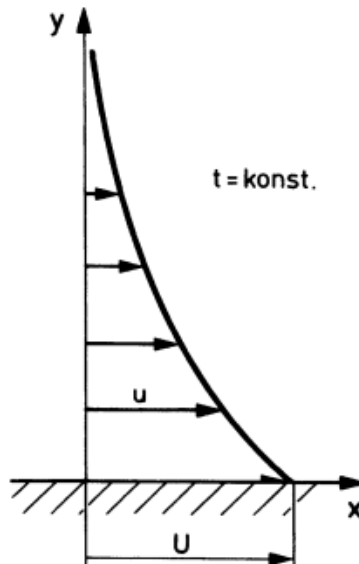
$$\begin{cases} t \leq 0: & u = 0, y \geq 0 \\ t > 0: & u(0,t) = U, u(\infty,t) = 0 \end{cases} \quad (24.1, 2)$$

Com a eliminação da gravidade, as equações de Navier-Stokes resultam em

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (25.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (25.2)$$

Figura 4. Escoamento da placa móvel de Rayleigh-Stokes.



A pressão também é constante na direção transversal ao escoamento. Essa propriedade característica das camadas limite é exatamente satisfeita aqui. **(25.1)** é uma equação do tipo 'condução de calor' e pode ser resolvida sob as condições **(24.1, 24.2)**. Combinamos y e t em uma variável adimensional s ,

$$\frac{y}{\sqrt{\nu t}} = s \quad (26)$$

Sendo

$$\frac{u(y,t)}{U} = f(s) \quad (27)$$

podemos escrever **(25.1)** e as condições de contorno **(24.1, 2)** como

$$f''(s) + \frac{s}{2} f'(s) = 0 ; [f(0) = 1, f(\infty) = 0] \quad (28)$$

Resolvendo, obtemos a função erro

$$\frac{u(y,t)}{U} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{\nu t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) d\xi = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \quad (29)$$

e resulta um único perfil de velocidades, o qual é dependente da variável $y/(2\sqrt{\nu t})$ (Figura 5). Nesse caso, a velocidade pode ser determinada para qualquer distância y da parede em qualquer tempo t . Usando **(29)**, busca-se determinar a espessura δ da camada de fluido que é arrastada com o movimento da placa. Com $y = \delta$, seja $u/U = 0.01$. Substituindo em **(29)**, temos

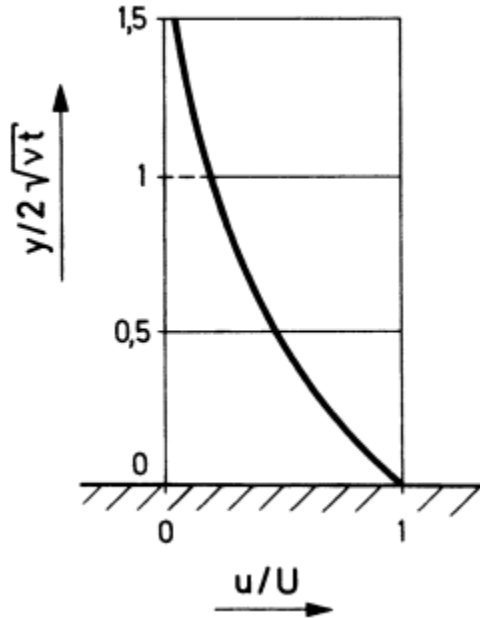
$$\delta \approx 4\sqrt{\nu t} \quad (30)$$

Como esperado, a espessura da camada aumenta com o tempo. A dependência de raiz quadrada ($\delta \propto t^{1/2}$) é característica de processos envolvendo atrito e condução de calor. Sendo $\ell = t \times U$, onde ℓ é a distância percorrida na direção da placa móvel, temos

$$\frac{\delta}{\ell} \approx \frac{4}{\sqrt{\frac{U\ell}{\nu}}} = \frac{4}{\sqrt{\operatorname{Re}_\ell}} \quad (31)$$

Isso inevitavelmente leva à teoria de camadas limite, uma vez que δ pode ser tomado como a espessura da camada limite e ℓ como o comprimento na direção do desenvolvimento do escoamento. A dependência $\sim 1/\sqrt{\operatorname{Re}_\ell}$ é típica de camadas limite laminares e será encontrada novamente no futuro.

Figura 5. Perfil universal de velocidades da placa móvel.



▲ **Termos importantes**

■ **Couette-Strömung** (“Escoamento de Couette”): Escoamento de um fluido viscoso entre duas superfícies no qual uma superfície (ou ambas) está (estão) se deslocando tangencialmente à outra. O movimento relativo da(s) superfície(s) impõe uma tensão de cisalhamento ao fluido e assim promove seu deslocamento.

■ **Rayleigh-Stokessches Problem für die Platte** (“Problema da placa de Rayleigh-Stokes”): Também conhecido simplesmente como ‘problema de Rayleigh’ ou ‘primeiro problema de Stokes,’ trata-se da determinação do campo de velocidades obtido quando uma placa horizontal infinita desloca-se em relação a uma camada de fluido. A resolução do problema é uma das mais simples soluções analíticas conhecidas para as equações de Navier-Stokes.



A **Lotka** oferece uma variedade de serviços de tradução, revisão e composição.

www.lotkatranslation.com



Tradução técnica

Traduzimos artigos, manuscritos e outros gêneros textuais em 8 idiomas.



Revisão técnica

Melhoramos a qualidade gramatical e estilística do seu documento.



Jargão e terminologia

Dominamos as terminologias e jargões de diversas áreas de engenharia e ciências naturais.



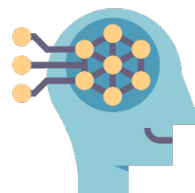
Edição de referências bibliográficas

Preparamos listas de referências em 4 padrões diferentes (ABNT, Harvard, APA, MLA).



Edição de expressões matemáticas

Preparamos as equações, reações químicas, tabelas e outros elementos especiais do seu documento.



Revisão de documentos gerados por inteligência artificial

Tecnologias de inteligência artificial generativa são ainda incipientes e propensas a erro. A Lotka pode melhorar a qualidade técnica de textos gerados ou traduzidos por IA.