



Tradução Técnica

■ **Excerto 4: Teoria de adensamento de Terzaghi**

■ **Excerpt 4: Terzaghi's consolidation theory**

◆ **Lucas Monteiro Nogueira**

Nº	Título	Idioma	Referência
1	Grundlagen der Konsolidierung (Aspectos básicos de adensamento)	Alemão → Português	Kolymbas (1998)
2	More on Terzaghi's theory of one-dimensional consolidation (Maiores detalhes sobre a teoria de adensamento unidimensional de Terzaghi)	Inglês → Português	Das e Sobhan (2018)
3	Determining the coefficient of consolidation (Determinando o coeficiente de adensamento)	Inglês → Português	Das e Sobhan (2018)
4	Problèmes résolus (Problemas resolvidos)	Francês → Português	Sanglerat et al. (1985)

◆ **Referências**

1. Kolymbas, D. (1998). *Geotechnik – Bodenmechanik und Grundbau*. Springer.
- 2, 3. Das, B.M. e Sobhan, K. (2018). *Principles of Geotechnical Engineering*. 9ª edição. Cengage Learning.
4. Sanglerat, G., Olivari, G. e Cambou, B. (1985). *Problèmes Résolus de Mécanique des Sols e Fondations 1*. Dunod.

◆ **Índice**

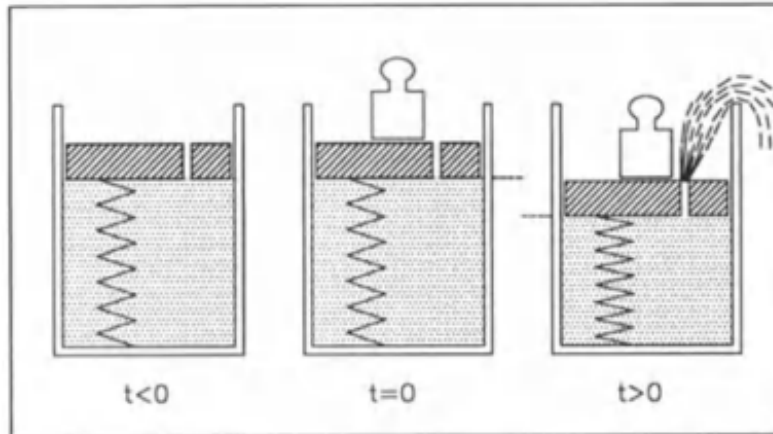
1. **Grundlagen der Konsolidierung**
2. **More on Terzaghi's theory of one-dimensional consolidation**
3. **Determining the coefficient of consolidation**
4. **Problèmes résolus**
 - 4.1. **Problème 1**
 - 4.2. **Problème 2**
 - 4.3. **Problème 3**

◆ 1. Grundlagen der Konsolidierung

↳ Referência 1 (Kolymbas, 1998), pp. 131 – 134. Com modificações.

Wir betrachten eine wassergesättigte Bodenprobe in einem **Ödometergerät**. Die mechanische Situation kann durch Abbildung 1 schematisch dargestellt werden.

Abbildung 1. Schema zur Konsolidierung.



Der Topf in Abbildung 1 enthält Wasser (Porenwasser) und eine Feder, die hier stellvertretend für das Korngerüst steht. Zwar ist die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Korngerüsts nichtlinear, aber dies ist hier zunächst unwesentlich. Die kleine Öffnung an der Kopfplatte steht in Abbildung 1 stellvertretend für die engen Porenkanäle der Bodenprobe. Nun wird die so dargestellte "Bodenprobe" belastet. Damit sich diese Belastung auf die Feder (Korngerüst) auswirkt, muß diese verkürzt werden. Dazu aber muss das Wasser entweichen. Da dieser Vorgang nur allmählich erfolgen kann, kann auch die Feder nur allmählich verkürzt werden. So wirkt die aufgebrachte Last zunächst nur auf das Porenwasser und ruft einen ebenso grossen Anstieg des Porenwasserdruckes hervor, der dann allmählich abgebaut wird. Das Ausquetschen des Wassers geht mit einer Volumenverminderung der Probe einher. Wir gehen davon aus, daß diese Volumenverminderung nur einer Verminderung des Porenraums entspricht, d.h. sie kommt durch eine Umordnung der einzelnen Körner zu einem dichteren Lagerungszustand, während das Volumen der einzelnen Körner nicht verändert wird.

Die für Konsolidierung maßgebende Differentialgleichung wird für den örtlich eindimensionalen Fall aus Massenerhaltung der Bodenkörner und des Porenwassers, dem Darcyschen Gesetz und einer Beziehung für die Kompressibilität des Korngerüsts hergeleitet. Sei α_w der Volumenanteil des Porenwassers. Bei der hier angenommenen vollständigen Wassersättigung ist α_w identisch mit der Porosität n . Somit ist der Volumenanteil der Körner $\alpha_s = 1 - n$. Seien ferner v^S und v^W die

Abstandsgeschwindigkeiten der Körner und des Porenwassers. ρ^S und ρ^W seien die Dichten der Körner und des Wassers (etwa $\rho^S \approx 2.65 \text{ g/cm}^3$ für Quarz-sand und $\rho^W \approx 1.0 \text{ g/cm}^3$ für Wasser). Die Massenerhaltungsgleichungen für die Bodenkörner und das Porenwasser lauten:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_S \rho^S) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_S \rho^S v^S) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_W \rho^W) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_W \rho^W v^W) = 0 \quad (1.2)$$

Nehmen wir an, daß die Bodenkörner und das Porenwasser inkompressibel sind (d.h. $\rho^S = \text{konst.}$, $\rho^W = \text{konst.}$), so erhalten wir:

$$\frac{\partial \alpha_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_S v^S) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_W v^W) = 0 \quad (2.2)$$

Mit $v_S := \alpha_S v^S$ und $v_W := \alpha_W v^W$ ($v_S, v_W = \text{Filtergeschwindigkeit}$) erhalten wir:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial v^S}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial v^W}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Nun lautet das Darcy-Gersevanov-Gesetz (für den Fall, daß sich nebst dem Porenwasser auch die Bodenkörner bewegen):

$$v_W - n v^S = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.1)$$

bzw. mit $v_S = (1 - n)v^S$:

$$v_W - e v_S = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.2)$$

Wir leiten Gleichung (4.2) nach z ab und erhalten:

$$\frac{\partial v_W}{\partial z} - v_S \frac{\partial e}{\partial z} - e \frac{\partial v_S}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (5)$$

Aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) folgt $\partial v_S / \partial z = -\partial v_W / \partial z$, und somit erhalten wir aus Gleichung (5):

$$\frac{\partial v_W}{\partial z} - v_S \frac{\partial e}{\partial z} - e \left(-\frac{\partial v_W}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

$$\therefore \frac{\partial v_W}{\partial z} - v_S \frac{\partial e}{\partial z} + e \frac{\partial v_W}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

$$\therefore (1+e) \frac{\partial v_w}{\partial z} - v_s \frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (6)$$

Einsätzen von **(3.2)** in **(6)** liefert mit $\partial n/\partial t = (1+e)^{-2} \partial e/\partial t$:

$$\begin{aligned} (1+e) \frac{\partial v_w}{\frac{\partial z}{= -\partial n/\partial t}} - v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore -(1+e) \frac{\partial n}{\partial t} - v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore (1+e) \frac{\partial n}{\partial t} + v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore (1+e) \times \frac{1}{(1+e)^2} \frac{\partial e}{\partial t} + v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial e}{\partial t} + v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

Wir berücksichtigen nun, daß für die Strömung des Porenwassers nur der von der hydrostatischen Druckverteilung abweichende Porenwasserüberdruck u maßgebend ist, und erhalten $dh = du/\gamma_w$. Ferner berücksichtigen wir, daß die konstante Auflast σ ($=\sigma_z$) in effektive Spannung σ' und Porenüberdruck u zerlegt wird, so daß $d\sigma = d\sigma' + du = 0$ bzw. $d\sigma' = -du$ gilt. Schließlich führen wir durch die Beziehung

$$de = -ad\sigma' = -adu \quad (8)$$

die Steifigkeit des Bodens ein. Somit erhalten wir aus Gleichung **(7)**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial e}{\partial t} + v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore \frac{a}{(1+e)} \frac{\partial u}{\partial t} + av_s \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

Aus $\partial v_s/\partial z = -\partial v_w/\partial z$ folgt $v_s = -v_w + b(t)$, wobei die Integrationskonstante $b(t)$ der Anpassung an die Randbedingungen dient:

$$\frac{a}{(1+e)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a}{(1+e)} \left(b + \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (10)$$

Für den Fall $k \approx \text{konst.}$ ergibt sich daraus die Differentialgleichung von Burgers. Terzaghi hat in der Herleitung der maßgeblichen Differentialgleichungen die Gleichungen **(3.1)** und **(4.1)** nicht berücksichtigt (d.h. er hat die Bewegung der Bodenpartikel außeracht gelassen, worauf schon Fillunger hinwies), so daß er aus Gleichung **(9)** mit der Annahme $k = \text{konst.}$ die Differentialgleichung

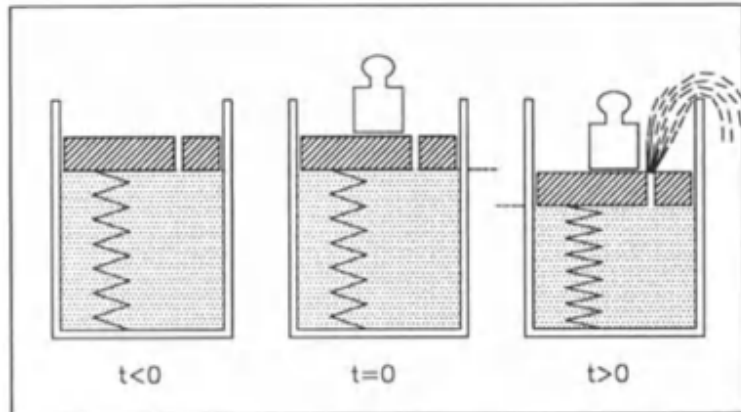
$$\frac{k(1+e)}{a\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (11)$$

erhielt. Diese partielle Differentialgleichung ist genau dieselbe Gleichung, welche (örtlich) eindimensionale Diffusions- und Wärmeleitungsprozesse beschreibt. Zu ihrer Lösung werden Anfangs- und Randbedingungen benötigt. Wir beschränken uns hier auf die Diskussion der Gleichung **(11)**, da der nichtlineare Term in **(10)** vernachlässigt werden darf. Ihre Lösung erfolgt nach dem Verfahren der Trennung der Variablen und anschließender Reiheentwicklung **(11)**. Man beachte, daß die Differentialgleichung **(11)** entsprechend ihrer Herleitung nur für das dargestellte örtlicheindimensionale Problem gilt. Daher ist die Verallgemeinerung auf drei Ortsdimensionen $e \nabla^2 u = \partial u / \partial t$, im allgemeinen nicht sinnvoll.

1. Aspectos básicos de adensamento

Consideramos uma amostra de solo saturado em um **edômetro**. O arranjo mecânico é mostrado esquematicamente na Figura 1.

Figura 1. Ilustração esquemática de adensamento.



O cilindro na Figura 1 contém água (água de poro) e uma mola que representa a estrutura granular. Embora a relação tensão-deformação na estrutura granular seja não-linear, isso não é importante aqui. A pequena

abertura na placa superior do sistema ilustrado na Fig. 1 representa os canais de poro do solo. Suponha agora que a amostra de solo é carregada. Para que esse carregamento afete a mola (isto é, a estrutura granular), a mola deve ser deformada. Porém, isso somente ocorrerá se a água escoar para fora da amostra, e, uma vez que esse processo só pode ocorrer de maneira gradual, a mola só pode ser comprimida gradualmente. A carga aplicada inicialmente age apenas sobre a água de poro e produz um aumento correspondente na poro-pressão, que então é gradualmente reduzida. A perda de água é acompanhada de uma redução no volume da amostra. Supomos que essa redução corresponde exclusivamente a uma redução no espaço de poros, isto é, esta provém de um

rearranjo dos grãos individuais para um estado mais denso, ao passo que o volume dos grãos permanece inalterado.

A equação diferencial que governa o adensamento é obtida com base na conservação localmente unidimensional de massa de grãos e água de poro; a lei de Darcy; e uma relação para a compressibilidade da matriz granular. Seja α_w a fração volumétrica da água de poro. Uma vez que o solo é completamente saturado, α_w é idêntico à porosidade n . Segue que a fração de volume ocupada pelos grãos é $\alpha_s = 1 - n$. Sejam v^S e v^W as **velocidades de percolação** dos grãos e da água de poro. Sejam ρ^S e ρ^W as densidades dos grãos e da água de poro (quais sejam, aproximadamente $\rho^S \approx 2.65 \text{ g/cm}^3$ para quartzo arenoso e $\rho^W \approx 1.0 \text{ g/cm}^3$ para água). As equações de conservação de massa para os grãos de solo e a água de poro são:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s \rho^S) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_s \rho^S v^S) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_w \rho^W) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_w \rho^W v^W) = 0 \quad (1.2)$$

Sendo os grãos de solo e a água de poro incompressíveis (isto é, $\rho^S = \text{const.}$, $\rho^W = \text{const.}$), obtemos:

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_s v^S) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_w v^W) = 0 \quad (2.2)$$

Sendo $v_s := \alpha_s v^S$ e $v_w := \alpha_w v^W$ (= **velocidade de Darcy**), obtém-se:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial v_w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

A equação de Darcy-Gersevanov torna-se (para o caso em que tanto os grãos de solo como a água de poro são deslocados):

$$v_w - n v^S = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.1)$$

mas, com $v_s = (1 - n)v^S$:

$$v_w - e v_s = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.2)$$

Podemos diferenciar (4.2) e obter:

$$\frac{\partial v_w}{\partial z} - v_s \frac{\partial e}{\partial z} - e \frac{\partial v_s}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (5)$$

Das equações (3.1) e (3.2) segue que $\partial v_s / \partial z = -\partial v_w / \partial z$; usando a equação (5), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_w}{\partial z} - v_s \frac{\partial e}{\partial z} - e \left(-\frac{\partial v_w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore \frac{\partial v_w}{\partial z} - v_s \frac{\partial e}{\partial z} + e \frac{\partial v_w}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore (1+e) \frac{\partial v_w}{\partial z} - v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (6) \end{aligned}$$

Recorrendo a (3.2) e (6) e utilizando $\partial n / \partial t = (1+e)^{-2} \partial e / \partial z$:

$$\begin{aligned} (1+e) \underbrace{\frac{\partial v_w}{\partial z}}_{=-\partial n / \partial t} - v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore -(1+e) \frac{\partial n}{\partial t} - v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore (1+e) \frac{\partial n}{\partial t} + v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore (1+e) \times \frac{1}{(1+e)^2} \frac{\partial e}{\partial t} + v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ \therefore \frac{1}{(1+e)} \frac{\partial e}{\partial t} + v_s \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

Verificamos agora que, no escoamento de água de poro, apenas o excesso de água de poro relativamente à distribuição de pressão hidrostática é decisivo para a percolação, então podemos escrever $dh = du / \gamma_w$. Verificamos ainda que a sobrecarga constante $\sigma (= \sigma_z)$ pode ser dividida em tensão efetiva σ' e poro-pressão u , resultando em $d\sigma = d\sigma' + du = 0$ ou $d\sigma' = -du$. Finalmente, obtemos a relação

$$de = -ad\sigma' = -adu \quad (8)$$

e a inserimos na equação (7) para obter:

$$\frac{1}{(1+e)} \frac{\partial e}{\partial t} + v_s \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

$$\therefore \frac{a}{(1+e)} \frac{\partial u}{\partial t} + av_s \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (9)$$

Sendo $\partial v_s / \partial z = -\partial v_w / \partial z$, segue que $v_s = -v_w + b(t)$, onde $b(t)$ é uma constante de integração usada na adaptação do problema às condições de contorno:

$$\frac{a}{(1+e)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a}{(1+e)} \left(b + \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (10)$$

Para o caso $k \approx \text{const.}$ obtém-se a equação diferencial de Burgers [referência no livro]. Em sua derivação, Terzaghi não considerou as equações (3.1) e (4.1) (isto é, ele ignorou o movimento das partículas de solo, conforme observou Fillinger [referência no livro]) e, com $k = \text{const.}$, partiu de (9) para obter a equação

$$\frac{k(1+e)}{a\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (11)$$

Essa equação é semelhante àquela que descreve (localmente) processos unidimensionais de difusão mássica e condução térmica. Condições de valor inicial e de contorno são necessárias para resolvê-las. Limitamo-nos aqui à discussão da equação (11), para a qual o termo não linear em (10) pode ser desprezado. De acordo com (11), a distribuição de poro-pressão varia ao longo do tempo. A solução desta segue um processo de separação de

▲ Termos importantes

- **Ödometergerät** (“Edômetro”): Instrumento utilizado para estudar o adensamento de solos em escala laboratorial. Em um teste edométrico, aplicam-se carregamentos incrementais a uma amostra de solo (geralmente cilíndrica) e mede-se as deformações obtidas.
- **Abstandgeschwindigkeit** (“Velocidade de percolação”): Razão entre a extensão de uma linha de fluxo em um escoamento subterrâneo e o tempo necessário para percorrê-la. A velocidade de percolação pode ser aproximada pela razão entre a velocidade de Darcy (ver definição abaixo) e a porosidade do meio.
- **Filtergeschwindigkeit** (“Velocidade de Darcy”): Razão entre a vazão de águas subterrâneas em uma região de subsolo e a área de seção transversal onde ocorre o escoamento. O termo ‘velocidade de Darcy’ é utilizado porque esta é a velocidade de escoamento prevista idealmente pela lei de Darcy.

variáveis e finalmente um desenvolvimento de séries de potência. É importante observar que a derivação de (11) corresponde apenas ao problema localmente unidimensional considerado aqui; a generalização em três dimensões, $e_v \nabla^2 u = \partial u / \partial t$, não é fisicamente dotada de sentido.

◆ **2. More on Terzaghi's theory of one-dimensional consolidation**

↳ *Referência 2/3 (Das e Sobhan, 2018), pp. 434 – 439. Com modificações.*

In the left-hand side of equation (11), k is the hydraulic conductivity, e is the voids ratio, a is the coefficient of compressibility, and γ_w is the unit weight of water. We can proceed to define the **coefficient of volume compressibility**, m_v , namely

$$m_v = \frac{a}{1+e} \quad (12)$$

The **oedometric modulus** is simply the inverse of m_v ,

$$E' = \frac{1}{m_v} = \frac{1+e}{a} \quad (13)$$

Finally, we can define the **coefficient of consolidation**, c_v , as

$$c_v = \frac{k(1+e)}{a\gamma_w} = \frac{k}{\gamma_w m_v} \quad (14)$$

so that Terzaghi's equation of one-dimensional consolidation becomes

$$\underbrace{\frac{k(1+e)}{a\gamma_w}}_{c_v} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (15)$$

Figure 2 shows a layer of clay of thickness $2H_{dr}$ (Note: H_{dr} = length of maximum drainage path) that is located between two highly permeable sand layers. With reference to the figure, we can posit the boundary conditions

$$\begin{cases} z = 0 & ; & u = 0 \\ z = 2H_{dr} & ; & u = 0 \\ t = 0 & ; & u = u_0 \end{cases} \quad (16)$$

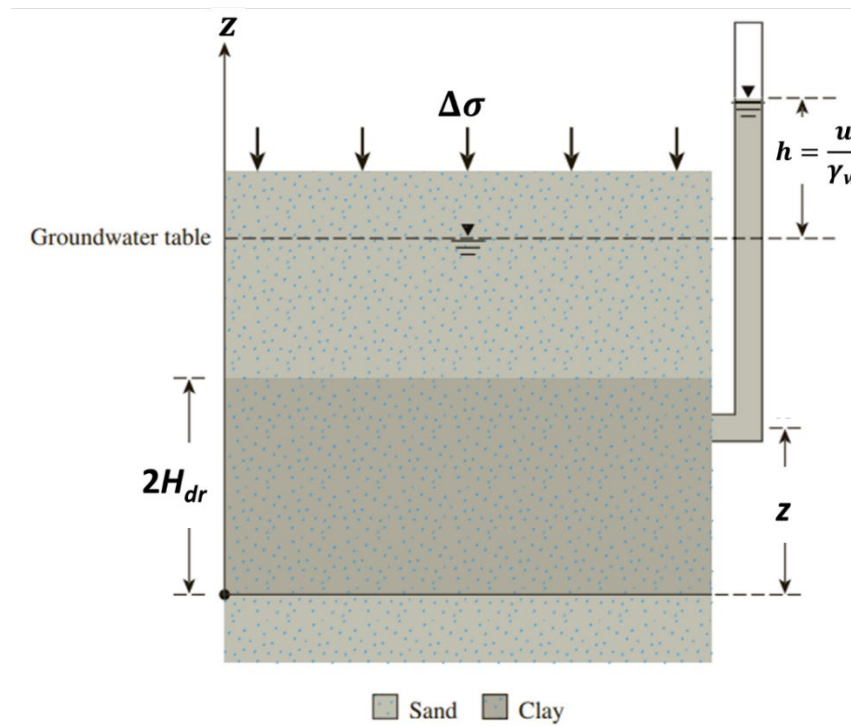
where u_0 is the initial excess porewater pressure. The analytical solution to (15) is

$$u = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\frac{2u_0}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H_{dr}}\right) \right] e^{-M^2 T_v} \quad (17)$$

where m is an integer and $M = (\pi/2)(2m + 1)$. Parameter T_v is a dimensionless quantity known as the **time factor**:

$$T_v = \frac{c_v t}{H_{dr}^2} \quad (18)$$

Figure 2. Consolidation of a clay layer (dark brown) drained on both sides by sand layers (light brown).



Because consolidation progresses by the dissipation of excess porewater pressure, the degree of consolidation U_z at a distance z at any time t is

$$U_z = \frac{u_0 - u_z}{u_0} = 1 - \frac{u_z}{u_0} \quad (19)$$

The **average degree of consolidation** \bar{U} for the entire depth of the clay layer at any time t can be written as

$$\bar{U} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2H_{dr}} \right) \int_0^{2H_{dr}} u_z dz}{u_0} \quad (20)$$

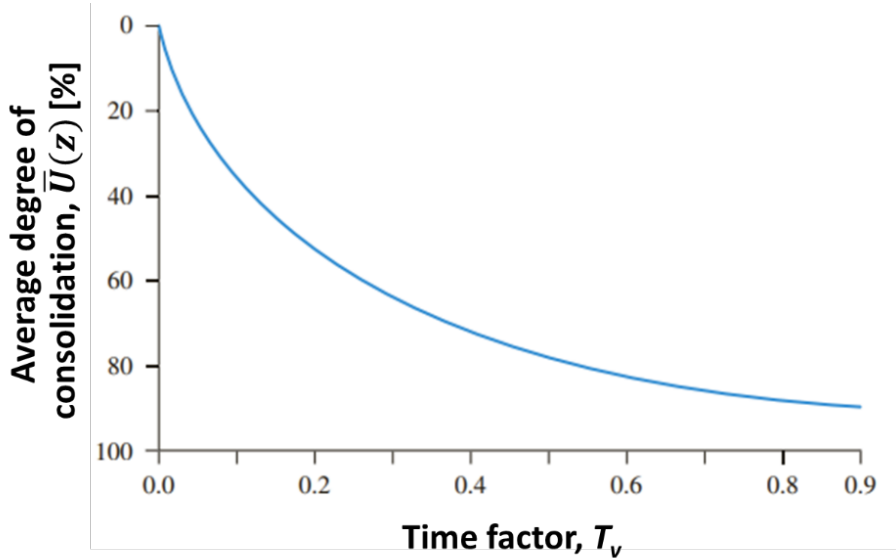
Carrying out the integration on the right-hand side and simplifying,

$$\bar{U} = 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v} \quad (21)$$

The variation in the average degree of consolidation with the nondimensional time factor T_v is shown in Figure 3, which represents the case where initial pore pressure u_0 is the same for the entire depth of the consolidating layer. Alternatively, the values of the time factor as functions of \bar{U} may also be approximated by the following two relationships:

$$\begin{cases} \text{For } U = 0 \text{ to } 60\% & ; \quad T_v = \frac{\pi}{4} \left(\frac{U[\%]}{100} \right)^2 \\ \text{For } U > 60\% & ; \quad T_v = 1.781 - 0.933 \log_{10}(100 - U[\%]) \end{cases} \quad (22)$$

Figure 3. Variation of avg. degree of consolidation with time factor.



2. Maiores detalhes sobre a teoria de adensamento unidimensional de Terzaghi

No lado esquerdo de (11), k é a condutividade hidráulica, e é o índice de vazios, a é o coeficiente de compressibilidade e γ_w é o peso unitário da água. Podemos prosseguir e definir o **coeficiente de compressibilidade volumétrica**, m_v , qual seja,

$$m_v = \frac{a}{1+e} \quad (12)$$

O **módulo edométrico** é simplesmente o inverso de m_v ,

$$E' = \frac{1}{m_v} = \frac{1+e}{a} \quad (13)$$

Finalmente, definimos o **coeficiente de adensamento**, c_v , como

$$c_v = \frac{k(1+e)}{a\gamma_w} = \frac{k}{\gamma_w m_v} \quad (14)$$

de modo que a equação de adensamento unidimensional de Terzaghi torna-se

$$\underbrace{\frac{k(1+e)}{a\gamma_w}}_{c_v} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (15)$$

A Figura 2 mostra uma camada argilosa de espessura $2H_{dr}$ (Nota: H_{dr} = distância máxima de drenagem) localizada entre duas camadas de areia altamente permeável. Recorrendo à figura, podemos enunciar as condições de contorno

$$\begin{cases} z = 0 & ; & u = 0 \\ z = 2H_{dr} & ; & u = 0 \\ t = 0 & ; & u = u_0 \end{cases} \quad (16)$$

onde u_0 é o excesso de poro-pressão inicial. A solução analítica de (15) é

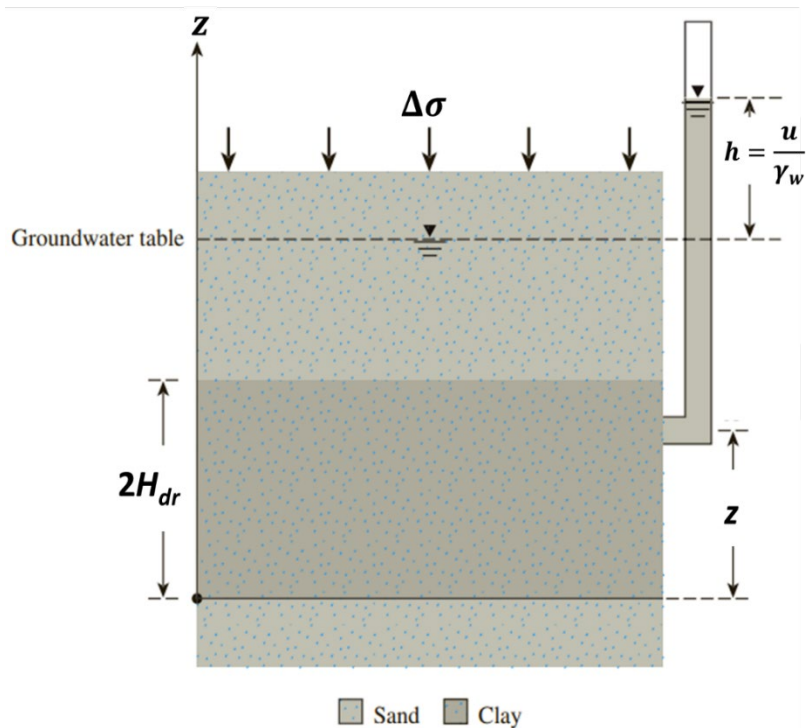
$$u = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\frac{2u_0}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H_{dr}}\right) \right] e^{-M^2 T_v} \quad (17)$$

onde m é um número inteiro e $M = (\pi/2)(2m + 1)$. O parâmetro T_v é uma variável adimensional chamada **fator tempo**:

$$T_v = \frac{c_v t}{H_{dr}^2} \quad (18)$$

Figura 2. Adensamento de uma camada de argila (marrom escuro) drenada em ambos os lados por camadas de areia (marrom claro).

Uma vez que o adensamento procede pela dissipação da poro-pressão em excesso, o grau de adensamento U_z a uma distância z em qualquer tempo t é



$$U_z = \frac{u_0 - u_z}{u_0} = 1 - \frac{u_z}{u_0} \quad (19)$$

O **grau médio de adensamento** \bar{U} para toda a camada de argila em um tempo t pode ser escrito como

$$\bar{U} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2H_{dr}}\right) \int_0^{2H_{dr}} u_z dz}{u_0} \quad (20)$$

Realizando a integração no lado direito e simplificando,

$$\bar{U} = 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v} \quad (21)$$

▲ Termos importantes

■ **Coefficient of volume compressibility** (“Coeficiente de compressibilidade volumétrica”): Parâmetro dado por

$$m_v = \frac{(\Delta e / \Delta \sigma)}{1 + e}$$

onde Δe é a variação de índice de vazios no decurso de um processo de adensamento, $\Delta \sigma$ é a variação de tensão, e e é o índice de vazios (às vezes tomado como a média aritmética entre o índice inicial e_0 e o índice final e_1).

■ **Oedometric modulus** (“Módulo edométrico”): Inverso do coeficiente de compressibilidade volumétrica.

■ **Coefficient of consolidation** (“Coeficiente de adensamento”): Parâmetro que reúne grandezas hidráulicas e geotécnicas pertinentes para o cálculo de adensamentos com a teoria unidimensional de Terzaghi. O coef. de adensamento c_v é dado por

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w m_v}$$

onde k é a condutividade hidráulica do solo, γ_w é o peso unitário da água e m_v é o coeficiente de compressibilidade volumétrica.

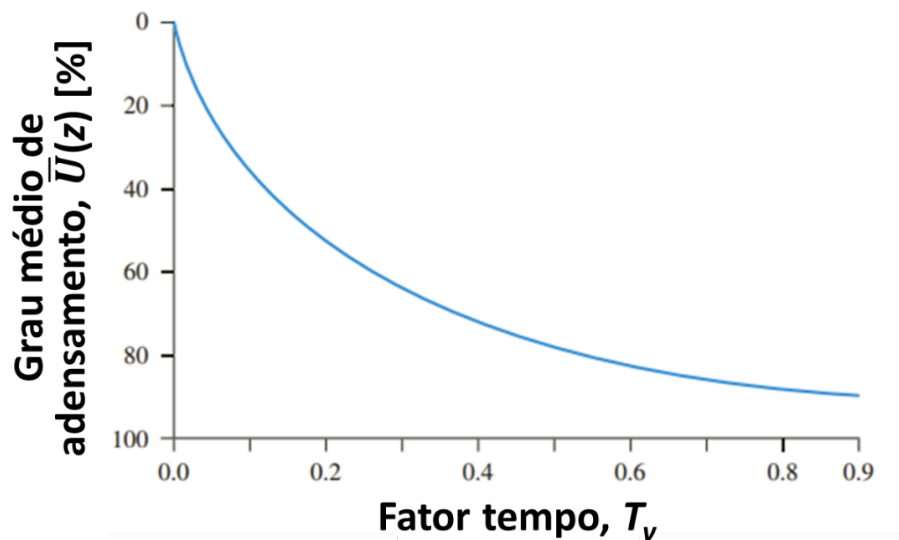
■ **Time factor** (“Fator tempo”): Parâmetro adimensional que aparece na solução analítica da equação de adensamento de Terzaghi.

■ **Average degree of consolidation** (“Grau médio de adensamento”): Parâmetro adimensional, usualmente expresso como uma porcentagem, que indica o progresso temporal do adensamento de uma camada de solo.

A variação do grau médio de adensamento com o fator tempo T_v é exibida na Figura 3, que concerne ao caso em que a poro-pressão inicial u_0 é a mesma para toda a profundidade da camada de solo. De modo alternativo, o valor de T_v pode ser aproximado com as duas expressões a seguir:

$$\begin{cases} \text{For } U = 0 \text{ to } 60\% & ; \quad T_v = \frac{\pi}{4} \left(\frac{U[\%]}{100} \right)^2 \\ \text{For } U > 60\% & ; \quad T_v = 1.781 - 0.933 \log_{10} (100 - U[\%]) \end{cases} \quad (22)$$

Figura 3. Variação do grau médio de adensamento com o fator tempo.



◆ 3. Determining the coefficient of consolidation

↳ Referência 2/3 (Das e Sobhan, 2018), pp. 447 – 449. Com modificações.

The coefficient of consolidation c_v generally decreases as the liquid limit of soil increases. The range of variation of c_v for a given liquid limit of soil is wide. For a given load increment of a specimen, two graphical methods are commonly used for determining c_v from laboratory one-dimensional consolidation tests. The first is the *logarithm-of-time method* proposed by Casagrande and Fadum (1940) and the second is the *square-root-of-time method* given by Taylor (1942).

3.1. Logarithm-of-time method

For a given incremental loading of the laboratory consolidation test, the specimen deformation against log-of-time plot is shown in Figure 4. The following constructions are needed to determine c_v in the framework of the logarithm of time method.

Step 1. Extend the straight-line portions of primary and secondary consolidations to intersect at A. The ordinate of A is represented by d_{100} – that is, the deformation at the end of 100% primary consolidation.

Step 2. The initial curved portion of the plot of deformation versus $\log t$ is approximated to be a parabola on the natural scale. Select times t_1 and t_2 on the curved portion such that $t_2 = 4t_1$. Let the difference of specimen deformation during time $(t_2 - t_1)$ be equal to x .

Step 3. Draw a horizontal line DE such that the vertical distance BD is equal to x . The deformation corresponding to the line DE is d_0 (that is, deformation at 0% consolidation).

Step 4. The ordinate of point F on the consolidation curve represents the deformation at 50% primary consolidation, and its abscissa represents the corresponding time (t_{50}).

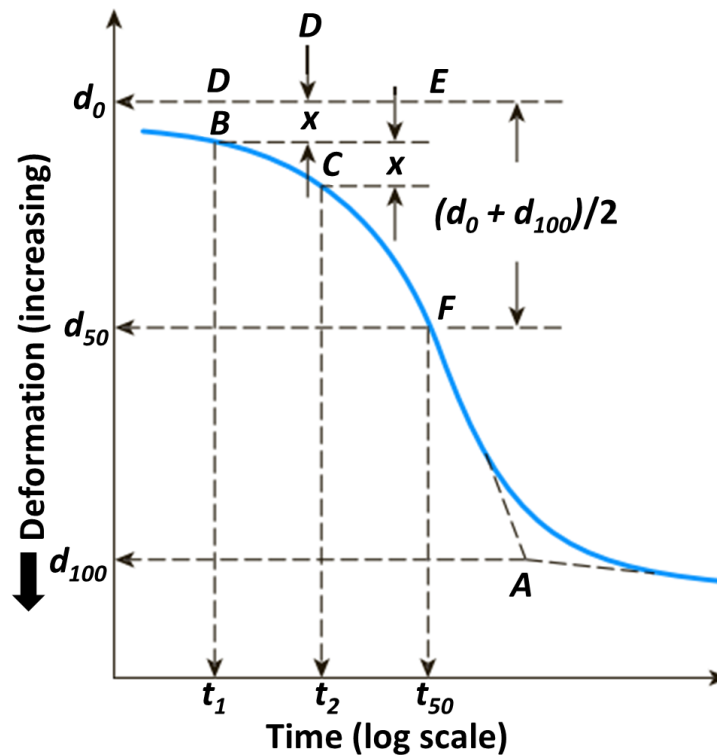
Step 5. For 50% average degree of consolidation, time factor $T_v = 0.197$, hence

$$T_{50} = \frac{c_v t_{50}}{H_{dr}^2} \rightarrow c_v = \frac{T_{50} H_{dr}^2}{t_{50}}$$

$$\therefore c_v = \frac{0.197 H_{dr}^2}{t_{50}} \quad (23)$$

where H_{dr} = average longest drainage path during consolidation.

Figure 4. Logarithm-of-time method for determining the consolidation coefficient c_v .



3. Determinação do coeficiente de adensamento

O coeficiente de adensamento c_v geralmente diminui à medida que o limite líquido do solo aumenta. O intervalo de variação de c_v para um dado limite líquido de solo é amplo. Para um certo incremento de carga em uma amostra de solo, dois métodos gráficos são geralmente utilizados para determinar c_v com o respaldo de testes de adensamento unidimensional. O primeiro é o *método logaritmo do tempo* proposto por Casagrande e Fadum (1940) e o segundo é o *método da raiz quadrada do tempo* proposto por Taylor (1940).

3.1. Método do logaritmo do tempo

Para um dado carregamento incremental no teste laboratorial de adensamento, a deformação da amostra de solo *versus* o logaritmo do tempo é dada na Figura 4. As seguintes construções são utilizadas para determinar c_v no âmbito do método logaritmo do tempo.

Passo 1. Estender com linhas retas as porções do gráfico para adensamentos primário e secundário, as quais interceptam-se em um ponto A. A ordenada de A é denotada por d_{100} – isto é, a deformação ao fim de 100% de adensamento primário.

Passo 2. A porção curva inicial do gráfico deformação *versus* $\log t$ é aproximada como uma parábola na escala natural. Selecione tempos t_1 e t_2 na porção curva tais que $t_2 = 4t_1$. Suponha que a diferença entre deformações durante o intervalo $(t_2 - t_1)$ é igual a x .

Passo 3. Estender uma reta horizontal DE tal que a distância vertical BD é igual a x . A deformação correspondente à linha DE é d_0 (isto é, a deformação a 0% de adensamento).

Passo 4. A ordenada do ponto F na curva de adensamento representa a deformação a 50% de adensamento primário, e sua abscissa representa o tempo correspondente (t_{50}).

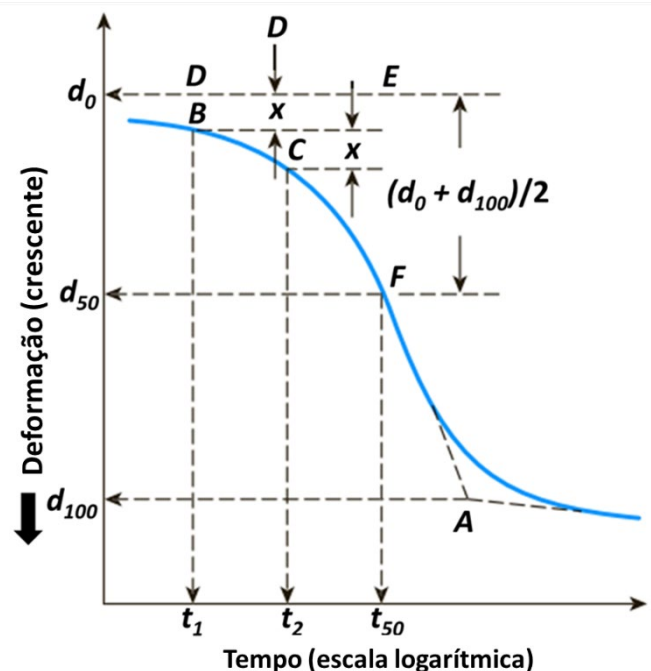
Passo 5. Para um grau de adensamento igual a 50%, o fator tempo é $T_v = 0.197$, portanto

$$T_{50} = \frac{c_v t_{50}}{H_{dr}^2} \rightarrow c_v = \frac{T_{50} H_{dr}^2}{t_{50}}$$

$$\therefore c_v = \frac{0.197 H_{dr}^2}{t_{50}} \quad (23)$$

onde H_{dr} = distância de drenagem máxima durante adensamento.

Figura 4. Método logaritmo do tempo para determinação do coeficiente de adensamento.



3.2. Square-root-of-time method

In the square-root-of-time method, a plot of deformation against the square root of time is made for the incremental loading (Figure 5). Other graphic constructions required are as follows.

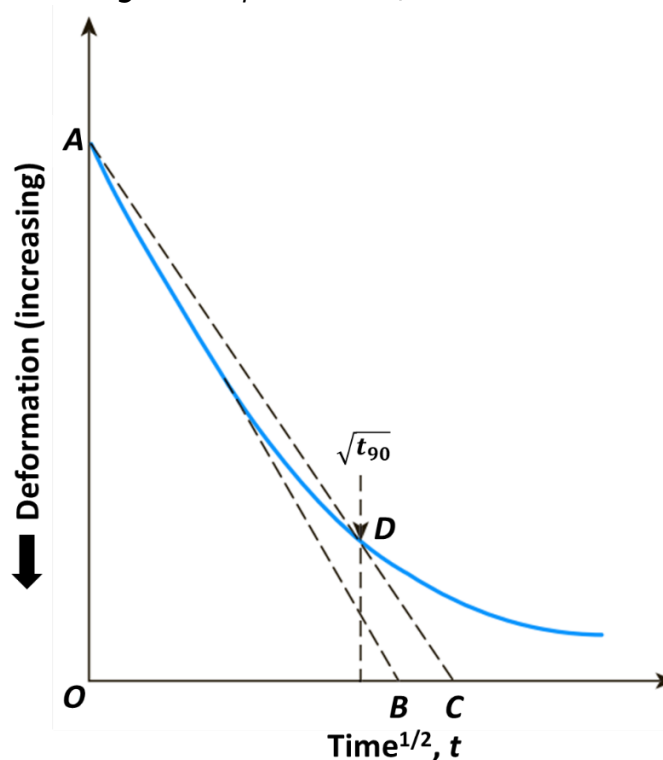
Step 1. Draw a line AB through the early portion of the curve.

Step 2. Draw a line AC such that $\overline{OC} = 1.15\overline{OB}$. The abscissa of point D , which is the intersection of AC and the consolidation curve, gives the square root of time for 90% consolidation ($\sqrt{t_{90}}$).

Step 3. For 90% consolidation, time factor $T_v \approx 0.848$, hence the coefficient of consolidation can be determined as

$$T_{90} = 0.848 = \frac{c_v t_{90}}{H_{dr}^2} \rightarrow \boxed{c_v = \frac{0.848 H_{dr}^2}{t_{90}}} \quad (24)$$

Figure 5. Square-root-of-time method.



3.2. Método raiz quadrada do tempo

No método raiz quadrada do tempo, construímos para carregamentos incrementais um gráfico de deformação *versus* raiz quadrada do tempo (Figura 5). Outras construções gráficas necessárias são as seguintes.

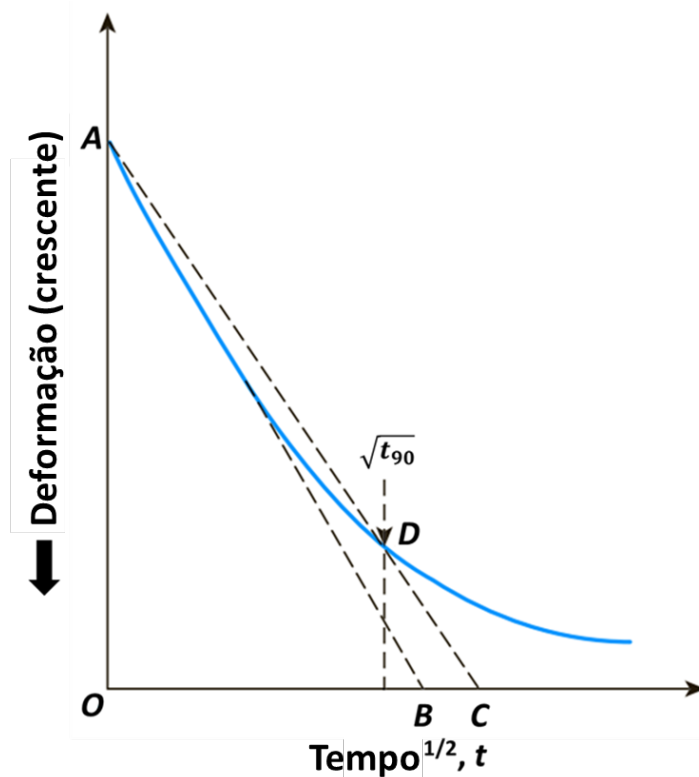
Passo 1. Traçar uma reta AB ao longo da porção inicial da curva.

Passo 2. Traçar uma reta AC tal que $\overline{OC} = 1.15\overline{OB}$. A abscissa do ponto D , que é o ponto de interseção entre AC e a curva de adensamento, fornece a raiz quadrada do tempo necessário para 90% de adensamento ($\sqrt{t_{90}}$).

Passo 3. Para 90% de adensamento, o fator tempo $T_v \approx 0.848$, logo o coeficiente de adensamento pode ser determinado como

$$T_{90} = 0.848 = \frac{c_v t_{90}}{H_{dr}^2} \rightarrow \boxed{c_v = \frac{0.848 H_{dr}^2}{t_{90}}} \quad (24)$$

Figura 5. Método raiz quadrada do tempo.



◆ 4. Problèmes résolus

↳ Referência 4 (Sanglerat et al., 1985), pp. 122 – 126. Com modificações.

4.1. Problème 1

On étudie la consolidation d'une couche d'argile drainée sur ses deux faces de 8 m d'épaisseur. Cette argile a un coefficient de perméabilité de 3×10^{-9} cm/s et un module oedométrique de 400 daN/cm². On demande le temps nécessaire pour atteindre un degré de consolidation de 40%.

Réponse. En sachant que le degré de consolidation est dans l'intervalle $0 < U < 60\%$, on peut utiliser

$$T_v = \frac{\pi}{4} \left(\frac{U(\%)^2}{100} \right) = \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{40}{100} \right)^2 = 0.126$$

On peut donc déterminer le temps t_{40} nécessaire pour atteindre un degré de consolidation de 40%,

$$T_v = \frac{c_v t}{H_{dr}^2} \rightarrow t_{40} = \frac{T_v \times H_{dr}^2}{c_v}$$

On sait que $c_v = kE'/\gamma_w$, où k est le coefficient de perméabilité, E' est le module oedométrique et $\gamma_w \approx 9.81 \text{ kN/m}^3$. On a $T_v = 0.126$, $H_{dr} = 8.0/2 = 4.0 \text{ m}$ (couche ouverte), $k = 3 \times 10^{-9} \text{ cm/s} = 3 \times 10^{-11} \text{ m/s}$ et $E' = 4 \times 10^2 \text{ daN/cm}^2 = 4 \times 10^7 \text{ Pa}$, de sorte que

$$t_{40} = \frac{T_v H_{dr}^2}{c_v} = \frac{T_v H_{dr}^2}{(kE'/\gamma_w)} = \frac{T_v H_{dr}^2 \gamma_w}{kE'}$$

$$\therefore t_{40} = \frac{0.126 \times 4.0^2 \times 9810}{(3.0 \times 10^{-11}) \times (4.0 \times 10^7)} = 1.65 \times 10^7 \text{ sec} = 191 \text{ jours} = \boxed{6 \text{ mois } 11 \text{ jours}}$$

4. Problemas resolvidos

4.1. Problema 1

Estudamos o adensamento de uma camada de argila de 8 m de espessura, drenada por cima e por baixo. A argila tem condutividade hidráulica $3 \times 10^{-9} \text{ cm/s}$ e módulo edométrico 400 dN/cm^2 . Pergunta-se o tempo necessário para alcançar um grau médio de adensamento de 40%.

Resposta. Sabendo que o grau médio de adensamento está contido no intervalo $0 < U < 60\%$, podemos utilizar a primeira das equações **(22)**,

$$T_v = \frac{\pi}{4} \left(\frac{U(\%)^2}{100} \right) = \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{40}{100} \right)^2 = 0.126$$

Podemos então determinar o tempo t_{40} necessário para alcançar um grau de adensamento de 40%,

$$T_v = \frac{c_v t}{H_{dr}^2} \rightarrow t_{40} = \frac{T_v \times H_{dr}^2}{c_v}$$

Sabe-se que $c_v = kE'/\gamma_w$, onde k é a condutividade hidráulica, E' é o módulo edométrico e $\gamma_w \approx 9.81 \text{ kN/m}^3$. Temos $T_v = 0.126$, $H_{dr} = 8.0/2 = 4.0 \text{ m}$ (solo sob drenagem dupla), $k = 3 \times 10^{-9} \text{ cm/s} = 3 \times 10^{-11} \text{ m/s}$ e $E' = 4 \times 10^2 \text{ dN/cm}^2 = 4 \times 10^7 \text{ Pa}$, de modo que

$$t_{40} = \frac{T_v H_{dr}^2}{c_v} = \frac{T_v H_{dr}^2}{(kE'/\gamma_w)} = \frac{T_v H_{dr}^2 \gamma_w}{kE'}$$

$$\therefore t_{40} = \frac{0.126 \times 4.0^2 \times 9810}{(3.0 \times 10^{-11}) \times (4.0 \times 10^7)} = 1.65 \times 10^7 \text{ sec} = 191 \text{ dias} = \boxed{6 \text{ meses } 11 \text{ dias}}$$

4.2. Problème 2

L'indice des vides d'une argile A décroît de 0.581 à 0.512 lorsque la contrainte passe de 1.1 à 1.7 daN/cm². L'indice des vides d'une argile B décroît de 0.609 à 0.596 sous l'action de la même variation de contrainte. L'échantillon A a une épaisseur de 50% à celle de l'échantillon B. Néanmoins, l'échantillon B met trois fois plus de temps que l'échantillon A pour atteindre un degré de consolidation de 50% dans les mêmes conditions de drainage. Quel est le rapport des coefficients de perméabilité de A et B?

Réponse. Le coefficient de consolidation d'une argile est, d'après la théorie de Terzaghi, $c_v = kE'/\gamma_w$. Par ailleurs, le facteur temps s'écrit $T_v = (c_v/H^2)t$. Pour un même degré de consolidation, la valeur du facteur temps est la même pour les deux échantillons A et B, par suite on peut écrire

$$\frac{c_{v,A}}{H_A^2} t_{50,A} = \frac{c_{v,B}}{H_B^2} t_{50,B}$$

soit,

$$\frac{c_{v,A}}{c_{v,B}} = \left(\frac{H_A}{H_B} \right)^2 \times \frac{t_{50,B}}{t_{50,A}} = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \times 3 = \frac{27}{4}$$

Mais, avec la définition de coefficient de consolidation, on peut écrire le rapport

$$\frac{c_{v,A}}{c_{v,B}} = \frac{k_A E'_A / \gamma_w}{k_B E'_B / \gamma_w} = \frac{k_A}{k_B} \times \frac{E'_A}{E'_B}$$

Le module oedométrique est relié à l'indice des vides par:

$$\frac{\Delta \sigma}{E'} = -\frac{\Delta e}{1+e} \rightarrow E' = -\frac{\Delta \sigma (1+e)}{\Delta e}$$

Pour une même variation de contrainte σ de 1.1 à 1.7 daN/cm² nous aurons donc

$$\frac{E'_B}{E'_A} = \frac{\Delta e_A (1+e_B)}{\Delta e_B (1+e_A)} = \frac{0.069 \times (1+0.609)}{0.013 \times (1+0.581)} = 5.40$$

d'où:

$$\frac{c_{v,A}}{c_{v,B}} = \frac{k_A}{k_B} \times \frac{E'_A}{E'_B} \rightarrow \frac{k_A}{k_B} = \frac{c_{v,A}}{c_{v,B}} \times \frac{E'_B}{E'_A}$$

$$\therefore \frac{k_A}{k_B} = \frac{27}{4} \times 5.40 = \boxed{36.5}$$

Le coefficient de perméabilité d'échantillon A est 36.5 fois supérieur à celui d'échantillon B.

4.2. Problema 2

O índice de vazios de uma argila A é reduzido de 0.581 para 0.512 quando a tensão passa de 1.1 a 1.7 daN/cm². O índice de vazios de uma argila B passa de 0.609 a 0.596 sob o efeito da mesma variação de tensão. A amostra A tem espessura 50% maior que a amostra B. A amostra B requer três vezes mais tempo que a amostra B para alcançar um grau medido de adensamento de 50% sob as mesmas condições de drenagem. Qual é a razão entre as condutividades hidráulicas de A e B?

Resposta. Segundo a teoria de Terzaghi, o coeficiente de adensamento de uma argila é $c_v = kE'/\gamma_w$. Ademais, o fator tempo é $T_v = (c_v/H^2)t$. Para um mesmo grau de adensamento, o valor do fator tempo é o mesmo para as amostras A e B, então podemos escrever

$$\frac{c_{v,A}}{H_A^2} t_{50,A} = \frac{c_{v,B}}{H_B^2} t_{50,B}$$

ou seja,

$$\frac{c_{v,A}}{c_{v,B}} = \left(\frac{H_A}{H_B} \right)^2 \times \frac{t_{50,B}}{t_{50,A}} = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \times 3 = \frac{27}{4}$$

Mas, pela definição de coeficiente de adensamento, podemos escrever a razão

$$\frac{c_{v,A}}{c_{v,B}} = \frac{k_A E'_A / \gamma_w}{k_B E'_B / \gamma_w} = \frac{k_A}{k_B} \times \frac{E'_A}{E'_B}$$

O módulo edométrico é ligado ao índice de vazios pela relação

$$\frac{\Delta\sigma}{E'} = -\frac{\Delta e}{1+e} \rightarrow E' = -\frac{\Delta\sigma(1+e)}{\Delta e}$$

Para uma mesma variação de tensões σ de 1.1 a 1.7 daN/cm²,

$$\frac{E'_B}{E'_A} = \frac{\Delta e_A (1+e_B)}{\Delta e_B (1+e_A)} = \frac{0.069 \times (1+0.609)}{0.013 \times (1+0.581)} = 5.40$$

de onde

$$\frac{c_{v,A}}{c_{v,B}} = \frac{k_A}{k_B} \times \frac{E'_A}{E'_B} \rightarrow \frac{k_A}{k_B} = \frac{c_{v,A}}{c_{v,B}} \times \frac{E'_B}{E'_A}$$

$$\therefore \frac{k_A}{k_B} = \frac{27}{4} \times 5.40 = \boxed{36.5}$$

A condutividade da amostra A é 36.5 vezes maior que aquela da amostra B.

4.3. Problème 3

On réalise en laboratoire un essai oedométrique sur un échantillon d'argile de 2 cm d'épaisseur. Au bout de 5 minutes, on atteint un degré de consolidation de 50%. Au bout de combien de temps obtiendra-t-on *in situ* le même degré de consolidation pour une couche de 3.70 m de la même argile dans les mêmes conditions de drainage?

Réponse. Le facteur temps est donné par l'expression habituelle $T_v = c_v t / h^2$, avec $c_v = kE' / \gamma_w$. Appelons h' la longueur *in situ* correspondant à h , et t' le temps mis par la couche pour atteindre le degré de consolidation U . Le matériau et les conditions de drainage étant supposés les mêmes en laboratoire et *in situ*, le facteur temps est le même, et le coefficient de consolidation c_v est le même. On a donc,

$$T_v = \frac{c_v t'}{h'^2} = \frac{c_v t}{h^2}$$

d'où

$$t' = t \times \left(\frac{h'}{h} \right)^2$$

On a aussi $t = 5 \text{ minutes} = 300 \text{ sec}$, $h' = 3.7 \text{ m} = 370 \text{ cm}$ et $h = 2 \text{ cm}$, soit,

$$t' = 300 \times \left(\frac{370}{2} \right)^2 = 1.03 \times 10^7 \text{ sec} = 119 \text{ jours} \approx \boxed{4 \text{ mois}}$$

4.3. Problema 3

Em um laboratório, realiza-se um ensaio edométrico sobre uma amostra de argila de 2 cm de espessura. Ao fim de 5 minutos, é obtido um grau de adensamento de 50%. Ao fim de quanto tempo obter-se-á o mesmo grau de adensamento para uma camada de 3.70 m da mesma argila sob as mesmas condições de drenagem?

Resposta. O fator tempo é dado pela expressão habitual, $T_v = c_v t / h^2$, com $c_v = kE' / \gamma_w$. Chamamos h' a espessura *in situ* correspondente a h , e t' o tempo necessário para a camada de argila alcançar um grau de adensamento U . Sendo as condições de drenagem supostas iguais em laboratório ou *in situ*, o fator tempo e os coeficientes de adensamento serão os mesmos. Temos, portanto,

$$T_v = \frac{c_v t'}{h'^2} = \frac{c_v t}{h^2}$$

de onde

$$t' = t \times \left(\frac{h'}{h} \right)^2$$

No presente caso, $t = 5$ minutos = 300 sec, $h' = 3.7$ m = 370 cm e $h = 2$ cm, logo

$$t' = 300 \times \left(\frac{370}{2} \right)^2 = 1.03 \times 10^7 \text{ sec} = 119 \text{ dias} \approx \boxed{4 \text{ meses}}$$



A **Lotka** oferece uma variedade de serviços de tradução, revisão e composição.
www.lotkatranslation.com



Tradução técnica

Traduzimos artigos, manuscritos e outros gêneros textuais em 8 idiomas.



Revisão técnica

Melhoramos a qualidade gramatical e estilística do seu documento.



Jargão e terminologia

Dominamos as terminologias e jargões de diversas áreas de engenharia e ciências naturais.



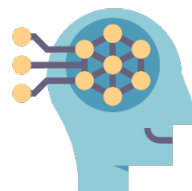
Edição de referências bibliográficas

Preparamos listas de referências em 4 padrões diferentes (ABNT, Harvard, APA, MLA).



Edição de expressões matemáticas

Preparamos as equações, reações químicas, tabelas e outros elementos especiais do seu documento.



Revisão de documentos gerados por inteligência artificial

Tecnologias de inteligência artificial generativa são ainda incipientes e propensas a erro. A Lotka pode melhorar a qualidade técnica de textos gerados ou traduzidos por IA.