



Tradução Técnica

■ **Excerto 3: Águas subterrâneas e teoria de poços**

■ **Excerpt 3: Groundwater and well theory**

◆ **Lucas Monteiro Nogueira**

Nº	Título	Idioma	Referência
1	Pozo en un acuífero cautivo – Régimen estacionário (Poço em um aquífero confinado – Regime estacionário)	Espanhol → Português	Custodio e Llamas (1983)
2	Soluzione analitiche dell'equazione differenziale di flusso per una geometria radialpiana – Funzione di Theis (Soluções analíticas para a equação diferencial de escoamento em uma geometria radial plana – Função de Theis)	Italiano → Português	Di Molfetta e Sathi (2012)
3	Analytical solutions for radial flow in a well – Hantush-Jacob well function (Soluções analíticas para escoamento radial em um poço – Função poço de Hantush-Jacob)	Inglês → Português	Fetter (2014)

◆ **Referências**

1. Custodio, E. e Llamas, M.R. (1983). *Hidrología Subterránea*. 2ª edição. Ediciones Omega.
2. Di Molfetta, A. e Sethi, R. (2012). *Ingegneria degli Acquiferi*. Springer.
3. Fetter, C.W., Jr. (2014). *Applied Hydrogeology: Pearson New International Edition*. 4ª edição. Pearson.

◆ Índice

1. Pozo en un acuífero cautivo – Régimen estacionario

1.1. La fórmula de Thiem

1.2. Cálculo de caudales y del caudal específico

1.3. La fórmula de Dupuit

2. Soluzione analitiche dell'equazione differenziale di flusso per una geometria radialpiana – Funzione di Theis

2.1. Ipotesi iniziali

2.2. Acquifero confinato

3. Analytical solutions for radial flow in a well – Hantush-Jacob well function

◆ 1. Pozo en un acuífero cautivo – Régimen estacionario

↳ Referência 1 (Custodio e Llamas, 1983), pp. 648 – 650; 658 – 659. Com modificações.

1.1. La fórmula de Thiem

En la práctica se realizan pocos ensayos que alcancen el régimen permanente de flujo em acuíferos, y si se logra no se dispone em general de um número suficiente de puntos de observación. Sin embargo, es formativo comprender primero el comportamiento de los pozos en régimen estacionario ya que en el mismo no interviene el coeficiente de almacenamiento. El lector debe saber que la mayoría de las aplicaciones de aguas subterrâneas se basan en teorías de flujo variable.

Para un pozo en un acuífero cautivo, con flujo en régimen permanente, el descenso s es obtenido por medio de la fórmula de Thiem:

$$s = \frac{Q}{2\pi T} \ln\left(\frac{R}{r}\right) = \frac{2.3Q}{2\pi T} \log_{10}\left(\frac{R}{r}\right) = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10}\left(\frac{R}{r}\right) \quad (1)$$

donde R es el **radio de influencia**, r es la distancia del eje del pozo al punto de observación, T es la **transmisividad** del acuífero, y Q es el caudal de bombeo. El descenso teórico en el pozo, s_p , es

$$s_p = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10}\left(\frac{R}{r_p}\right) \quad (2)$$

donde r_p es el radio del pozo. Debido a las pérdidas en el pozo, el descenso real es em general mayor que el teórico.

El radio de influencia R depende de las características del acuífero y en realidad es ligeramente creciente, con el tempo transcurrido desde el comienzo del bombeo. Para tiempos muy largos es constante a efectos prácticos. Para acuíferos cautivos su valor suele variar entre 200 y 10,000 m. Los errores de estimación afectan de forma menos sensible al

valor del descenso ya que está afectado del signo logarítmico. Así es $\ln(200) \approx 5.3$ y $\ln(10,000) \approx 9.2$, de modo que para un valor de R cincuenta veces mayor, el logaritmo sólo se multiplica por 1.7.

Problema 1. En um aquífero cautivo con 1000 m²/dia de transmisividad y en el que el radio de influencia puede admitirse que vale 1000 m, se extraen 50 m³/hora de un pozo de 500 mm de diámetro. Calcular el descenso teórico en el pozo de bombeo y en pozos de observación situados a 10, 100 y 500 m de distancia.

Respuesta. Tenemos el caudal $Q = 50 \text{ m}^3/\text{h} = 1200 \text{ m}^3/\text{dia}$, la transmisividad $T = 1000 \text{ m}^2/\text{dia}$, el radio de influencia $R = 1000 \text{ m}$ y el radio de pozo $r_p = 0.25 \text{ m}$. El descenso en el pozo es

$$s_p = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) = 0.366 \times \frac{1200}{1000} \times \log_{10} \left(\frac{1000}{0.25} \right) = \boxed{1.58 \text{ m}}$$

Calculamos entonces los descensos a 10, 100 y 500 m del pozo,

$$s = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) = 0.366 \times \frac{1200}{1000} \times \log_{10} \left(\frac{1000}{10} \right) = \boxed{0.878 \text{ m}}$$

$$s = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) = 0.366 \times \frac{1200}{1000} \times \log_{10} \left(\frac{1000}{100} \right) = \boxed{0.439 \text{ m}}$$

$$s = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) = 0.366 \times \frac{1200}{1000} \times \log_{10} \left(\frac{1000}{500} \right) = \boxed{0.132 \text{ m}}$$

1.1. A fórmula de Thiem

Na prática, realizam-se poucos ensaios que alcançam o regime estacionário de escoamento em aquíferos, e, mesmo quando isso ocorre, geralmente não há um número suficiente de pontos de observação. Todavia, é instrutivo compreender primeiro o comportamento de poços em regime estacionário uma vez que nestes não há interferência do coeficiente de armazenamento. O leitor deve estar ciente de que a maioria das aplicações de águas subterrâneas são baseadas em teorias de escoamento não permanente.

Para um poço em um aquífero confinado, com escoamento em regime permanente, o rebaixamento s é obtido pela fórmula de Thiem:

$$s = \frac{Q}{2\pi T} \ln \left(\frac{R}{r} \right) = \frac{2.3Q}{2\pi T} \log_{10} \left(\frac{R}{r} \right) = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r} \right) \quad (1)$$

onde R é o **raio de influência**, r é a distância do eixo do poço ao ponto de observação, T é a **transmissividade** do aquífero e Q é a vazão de bombeamento. O rebaixamento teórico do poço, s_p , é

$$s_p = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) \quad (2)$$

onde r_p é o raio do poço. Devido às perdas no poço, o rebaixamento real é geralmente maior que o rebaixamento teórico.

O raio de influência R depende das características do aquífero e é ligeiramente crescente com o tempo transcorrido desde o início do bombeamento. Para valores de tempo muito grandes, R é praticamente constante. Em aquíferos confinados o valor do raio de influência geralmente varia entre 200 e 10,000 m. Os erros de aproximação do raio de influência afetam de forma pouco sensível o rebaixamento, uma vez que na equação (2) este está contido em um logaritmo. Sabendo que $\ln(200) \approx 5.3$ e $\ln(10,000) \approx 9.2$, um aumento do raio de influência R em 50 vezes implica um logaritmo apenas 1.7 vezes maior.

Problema 1. Em um aquífero confinado com transmissividade de 1000 m²/dia e raio de influência igual a 1000 m, extraem-se 50 m³/hora de um poço de 500 mm de diâmetro. Calcular o rebaixamento teórico do poço de bombeamento para pontos de observação a 10, 100 e 500 m de distância.

Resposta. Temos a vazão $Q = 50 \text{ m}^3/\text{h} = 1200 \text{ m}^3/\text{dia}$, a transmissividade $T = 1000 \text{ m}^2/\text{dia}$, o raio de influência $R = 1000 \text{ m}$ e o raio do poço $r_p = 0.25 \text{ m}$. O rebaixamento no poço é

$$s_p = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) = 0.366 \times \frac{1200}{1000} \times \log_{10} \left(\frac{1000}{0.25} \right) = \boxed{1.58 \text{ m}}$$

Calculamos em seguida os rebaixamentos a distâncias de 10, 100 e 500 m do poço,

$$s = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) = 0.366 \times \frac{1200}{1000} \times \log_{10} \left(\frac{1000}{10} \right) = \boxed{0.878 \text{ m}}$$

$$s = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) = 0.366 \times \frac{1200}{1000} \times \log_{10} \left(\frac{1000}{100} \right) = \boxed{0.439 \text{ m}}$$

$$s = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) = 0.366 \times \frac{1200}{1000} \times \log_{10} \left(\frac{1000}{500} \right) = \boxed{0.132 \text{ m}}$$

1.2. Cálculo de caudales y del caudal específico

Despejando Q en la fórmula que describe el descenso s , obtenemos:

$$s_p = 0.366 \frac{Q}{2\pi T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) \rightarrow Q_{\max} = \frac{2.73 T s_p}{\log_{10} (R/r_p)} \quad (3)$$

Este resultado permite calcular Q conocidas T , R y r_p si se fija um cierto valor para s_p . Es de notar que s_p es el descenso teórico en el pozo, pudiendo ser el descenso real notablemente mayor. El **caudal específico teórico**, $q = Q/s_p$, vale:

$$q = \frac{2\pi T}{\log_{10} (R/r_p)} = \frac{2.73 T}{\log_{10} (R/r_p)} \quad (4)$$

Problema 2. En un acuífero cautivo con 500 m²/día de transmisividad y en el que el radio de influencia puede admitirse que vale 1500 m se desea extraer agua de un pozo de 400 mm de diámetro con un descenso máximo de 10 metros. ¿Qué caudal máximo se obtendrá? Calcular también el caudal específico del pozo.

Respuesta. Tenemos la transmisividad $T = 500$ m²/día, el radio de influencia $R = 1500$ m, el radio del pozo $r_p = 0.4/2 = 0.2$ m y el descenso máximo $s_p = 10$ m. El caudal máximo por lo tanto será

$$Q_{\max} = \frac{2.73 T s_p}{\log_{10} (R/r_p)} = \frac{2.73 \times 500 \times 10}{\log_{10} (1500/0.2)} = 3520 \text{ m}^3 / \text{día} = \boxed{147 \text{ m}^3 / \text{hora}}$$

Dividiendo esto por el descenso máximo s_p , obtenemos el caudal específico teórico q :

$$q = \frac{Q_{\max}}{s_p} = \frac{147}{10} = 14.7 \text{ m}^3 / \text{hora} = \boxed{353 \text{ m}^3 / \text{día}}$$

1.2. Cálculo de vazões e vazão específica

Resolviendo a equação (2) para a vazão Q_{\max} , tem-se:

$$s_p = 0.366 \frac{Q}{2\pi T} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) \rightarrow Q_{\max} = \frac{2.73 T s_p}{\log_{10} (R/r_p)} \quad (3)$$

Esse resultado permite calcular Q conhecidos T , R e r_p com um valor fixo s_p de rebaixamento. A **vazão específica teórica**, $q = Q/s_p$, vale

$$q = \frac{2\pi T}{\log_{10} (R/r_p)} = \frac{2.73 T}{\log_{10} (R/r_p)} \quad (4)$$

Problema 2. Em um acuífero confinado com 500 m²/día de transmissividade e no qual o raio de influência pode ser tomado como 1500 m, busca-se extrair água de um poço de 400

mm de diâmetro com um rebaixamento máximo de 10 metros. Qual será a vazão máxima obtida? Calcule também a vazão específica do poço.

Resposta. Temos a transmissividade $T = 500 \text{ m}^2/\text{dia}$, o raio de influência $R = 1500 \text{ m}$, o raio de poço $r_p = 0.4/2 = 0.2 \text{ m}$ e o rebaixamento máximo $s_p = 10 \text{ m}$. Portanto, a vazão máxima é:

$$Q_{\max} = \frac{2.73Ts_p}{\log_{10}(R/r_p)} = \frac{2.73 \times 500 \times 10}{\log_{10}(1500/0.2)} = 3520 \text{ m}^3 / \text{dia} = \boxed{147 \text{ m}^3/\text{hora}}$$

Dividindo pelo rebaixamento máximo s_p , obtemos a vazão específica teórica q :

$$q = \frac{Q_{\max}}{s_p} = \frac{147}{10} = 14.7 \text{ m}^3/\text{hora} = \boxed{353 \text{ m}^3/\text{dia}}$$

1.3. Fórmula de Dupuit

Sabemos que, si los descensos son pequeños en comparación con el espesor del acuífero, se puede aplicar la fórmula de Thiem con un radio de influencia R aproximado. Para descensos notables en relación con el espesor del acuífero, podemos estimar el descenso teórico con la fórmula de Dupuit:

$$H_0^2 - H^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln\left(\frac{R}{r}\right) = 0.73 \frac{Q}{k} \log_{10}\left(\frac{R}{r}\right) \quad (5)$$

donde H_0 es el espesor saturado inicial del acuífero, H es el espesor saturado del acuífero en el lugar considerado, y k es la conductividad hidráulica del medio. En el propio pozo el descenso teórico se puede calcular mediante:

$$H_0^2 - H_p^2 = 0.73 \frac{Q}{k} \log_{10}\left(\frac{R}{r_p}\right) \quad (6)$$

siendo H_p la altura del agua en el pozo tomando como referencia la base del acuífero.

Problema 3. Calcular los descensos en un pozo de 0.5 m de diámetro y a distancias del mínimo de 10 y 100 m, teniendo en cuenta que se bombean en régimen estacionario 80 m^3/h de un acuífero que inicialmente tenía 10 m de espesor y cuya transmissividad antes del bombeo era de 500 m^2/dia . Se supone que el radio de influencia vale 200 m. Comparar los resultados obtenidos al aplicar las fórmulas de Thiem y Dupuit.

Respuesta. Empleando la fórmula de Thiem con caudal $Q = 80 \text{ m}^3/\text{h} = 1920 \text{ m}^3/\text{dia}$, transmissividad $T = 500 \text{ m}^2/\text{dia}$, radio de influencia $R = 200 \text{ m}$ y radio de pozo $r = 0.25 \text{ m}$, obtenemos el siguiente descenso s :

$$s = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10}\left(\frac{R}{r}\right) = 0.366 \times \frac{1920}{500} \times \log_{10}\left(\frac{200}{0.25}\right) = \boxed{4.08 \text{ m}}$$

La conductividad hidráulica del acuífero es $k = T/H_0 = 500/10 = 50$ m/día. Empleando la ecuación (6), tenemos:

$$H_0^2 - H_p^2 = 0.73 \frac{Q}{k} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) \rightarrow 10^2 - H_p^2 = 0.73 \times \frac{1920}{50} \times \log_{10} \left(\frac{200}{0.25} \right)$$

$$\therefore H_p = \sqrt{10^2 - 0.73 \times \frac{1920}{50} \times \log_{10} \left(\frac{200}{0.25} \right)} = 4.32 \text{ m}$$

Por lo tanto el descenso será:

$$s = H_0 - H_p = 10 - 4.32 = \boxed{5.68 \text{ m}}$$

Efectuando los cálculos de igual manera para los puntos de observación a 10 y 100 metros del eje del pozo, preparamos la siguiente tabla.

Distancia del pozo (m)	Descenso (m) (Fórmula de Thiem) (Eq. (1))	Descenso (m) (Aproximación) (Eq. (6))	Error (%)
0.25	4.08	5.68	28.2
10	1.82	2.03	10.0
100	0.42	0.43	2.4

El error es considerable en las proximidades del pozo, donde el descenso afecta más a la transmisividad. Para puntos alejados del pozo el error es pequeño. La fórmula de Thiem da valores del descenso por defecto.

1.3. Fórmula de Dupuit

Sabemos que, se os rebaixamentos são pequenos em comparação à espessura do acuífero, pode-se aplicar a fórmula de Thiem (eq. (1)) com um raio de influência R aproximado. Para rebaixamentos notáveis relativamente à espessura do acuífero, podemos estimar o rebaixamento teórico com a fórmula de Dupuit:

$$H_0^2 - H^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \left(\frac{R}{r} \right) = 0.73 \frac{Q}{k} \log_{10} \left(\frac{R}{r} \right) \quad (5)$$

onde H_0 é a espessura saturada inicial do acuífero, H é a espessura saturada do acuífero no local sob consideração e k é a conductividade hidráulica do meio. No próprio poço o rebaixamento pode ser calculado como:

$$H_0^2 - H_p^2 = 0.73 \frac{Q}{k} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) \quad (6)$$

onde H_p é a profundidade d'água no poço relativamente à base do acuífero.

Problema 3. Calcular os rebaixamentos em um poço de 0.5 m de diâmetro e a distâncias de 10 e 100 m, sabendo que são bombeados 80 m³/h em um aquífero que quando saturado tinha 10 m de espessura e cuja transmissividade antes do bombeamento era de 500 m²/dia. Supõe-se que o raio de influência é 200 m. Compare os resultados obtidos ao aplicar as fórmulas de Thiem e Dupuit.

Resposta. Empregando a equação **(1)** com vazão $Q = 80 \text{ m}^3/\text{h} = 1920 \text{ m}^3/\text{dia}$, transmissividade $T = 500 \text{ m}^2/\text{dia}$, raio de influência $R = 200 \text{ m}$ e raio de poço $r = 0.25 \text{ m}$, obtemos o seguinte rebaixamento:

$$s = 0.366 \frac{Q}{T} \log_{10} \left(\frac{R}{r} \right) = 0.366 \times \frac{1920}{500} \times \log_{10} \left(\frac{200}{0.25} \right) = \boxed{4.08 \text{ m}}$$

A condutividade hidráulica do aquífero é $k = T/H_0 = 500/10 = 50 \text{ m}/\text{dia}$. Empregando a equação **(6)**, temos

$$H_0^2 - H_p^2 = 0.73 \frac{Q}{k} \log_{10} \left(\frac{R}{r_p} \right) \rightarrow 10^2 - H_p^2 = 0.73 \times \frac{1920}{50} \times \log_{10} \left(\frac{200}{0.25} \right)$$

$$\therefore H_p = \sqrt{10^2 - 0.73 \times \frac{1920}{50} \times \log_{10} \left(\frac{200}{0.25} \right)} = 4.32 \text{ m}$$

Portanto, o rebaixamento é:

$$s = H_0 - H_p = 10 - 4.32 = \boxed{5.68 \text{ m}}$$

Quanto aos cálculos para pontos de observação a 10 e 100 m do eixo do poço, preparamos a seguinte tabela.

Distância do poço (m)	Rebaixamento (m) (Fórmula de Thiem) (Eq. (1))	Rebaixamento (m) (Aproximação) (Eq. (6))	Erro (%)
0.25	4.08	5.68	28.2
10	1.82	2.03	10.0
100	0.42	0.43	2.4

Os erros são consideráveis nas proximidades do poço, onde o rebaixamento afeta a transmissividade de modo substancial. O erro é pequeno em pontos distantes do poço. A fórmula de Thiem fornece os valores do rebaixamento teórico.

▲ **Termos importantes**

■ **Radio de influencia** (“Raio de influência”): Distância radial do eixo de um poço até o ponto mais distante para o qual os efeitos do bombeamento são apreciáveis.

■ **Transmisividad** (“Transmissividade”): Taxa de transporte de água em um elemento de aquífero de espessura unitária sob efeito de um gradiente hidráulico unitário.

■ **Caudal específico teórico** (“Vazão específica teórica”): Propriedade de poços definida como a razão entre a vazão volumétrica bombeada e o rebaixamento produzido no aquífero.

◆ **2. Soluzione analitiche dell’equazione differenziale di flusso per una geometria radialpiana – Funzione di Theis**

↳ *Referência 2 (Di Molfetta e Sathi, 2012), pp. 35 – 38. Com modificações.*

2.1. Ipotesi iniziali

La geometria radialpiana è la geometria di flusso solitamente utilizzata per analizzare problemi di flusso pozzo-acquifero; si tratta di una particolare geometria bidimensionale, nella quale le linee di flusso sono rettilinee e convergenti verso l’asse del pozzo, vedasi la Figura 1, e la configurazione di flusso è identica verso l’asse del pozzo indipendentemente dalla quota.

Perché venga rispettato lo schema di flusso radialpiano è necessario che siano verificate simultaneamente le due condizioni:

1. Aquífero di spessore costante;
2. Pozzo completo, vale a dire finestrato lungo tutto lo spessore sature dell’acquifero.

Indipendentemente dalla geometria, è possibile trovare una soluzione dell’equazione differenziale di flusso nel caso si possano ritenere accettabili per il sistema considerato le seguenti ipotesi:

3. Aquífero omogeneo e isotropo;
4. Aquífero di estensione non limitata, almeno fino al tempo di analisi;
5. Superficie piezometrica iniziale orizzontale.

Per quanto concerne l’opera di captazione, infine, vengono assunte le seguenti ipotesi:

6. Pozzo di raggio infinitesimo;
7. Flusso laminare;
8. Portata erogata costante.

Figura 1. Rappresentazione della geometria radialpiana riferita ad un acquifero confinato.

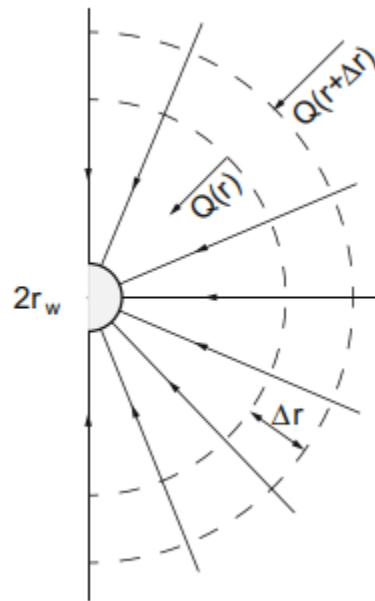
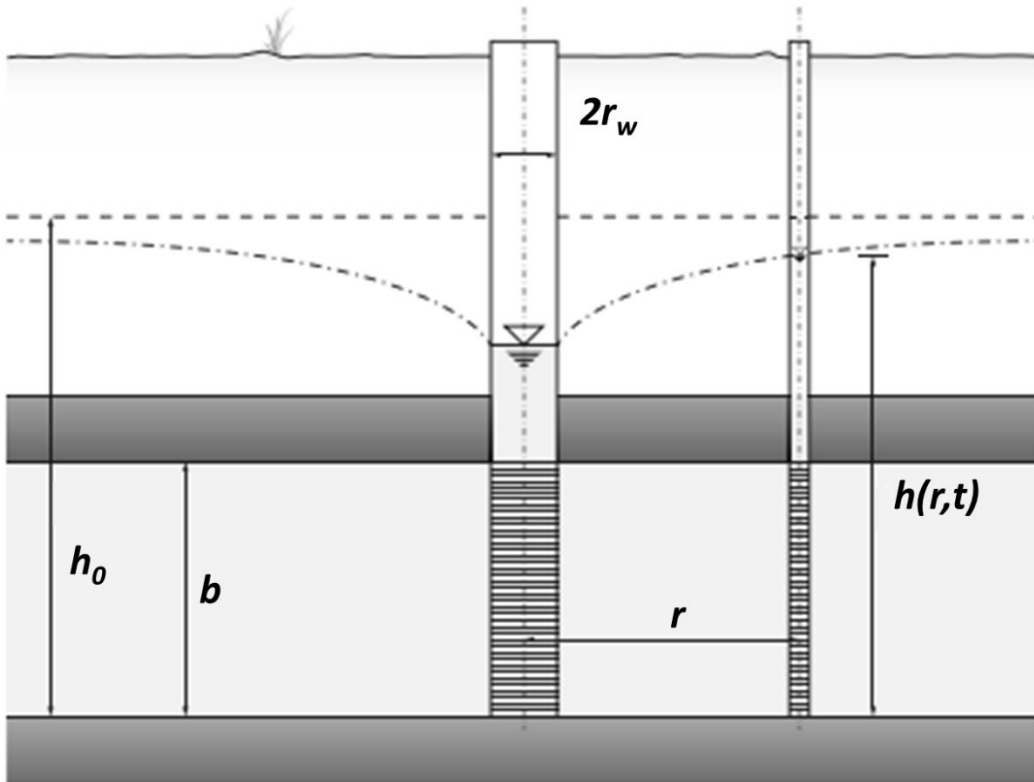


Figura 2. Acquifero confinato.



2.1. Hipóteses iniciais

A geometria plano-radial é a geometria de escoamento usualmente utilizada na análise problemas de escoamento poço-aquífero; trata-se de uma geometria bidimensional na qual todas as linhas de fluxo são retilíneas e convergem em direção ao eixo do poço, como mostra a Figura 1; a configuração de escoamento é idêntica em direção do eixo do poço, independentemente da elevação.

Para que seja obedecido o modelo de fluxo plano-radial é necessário que sejam simultaneamente verificadas duas condições:

1. O aquífero deve ter espessura constante.
2. O poço dever ser completo, isto é, deve penetrar toda a espessura do aquífero.

Independentemente da geometria, é possível encontrar uma solução para a equação diferencial de escoamento sob a condição de que sejam aceitáveis para o sistema considerado as seguintes hipóteses:

3. O aquífero é homogêneo e isotrópico;
4. O aquífero tem extensão horizontal infinita, ao menos durante o tempo de análise;
5. A superfície piezométrica inicial é horizontal;

No que concerne ao trabalho de captação de água, por fim, são admitidas as seguintes hipóteses:

6. O poço tem raio infinitesimal;
7. O escoamento é laminar;
8. A vazão dispensada é constante.

Figura 1. Representação da geometria plano-radial referente a um aquífero confinado.

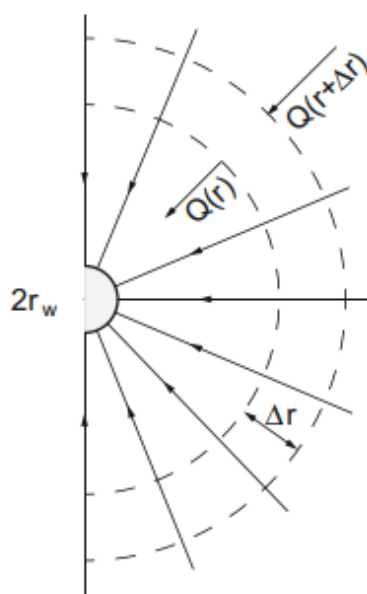
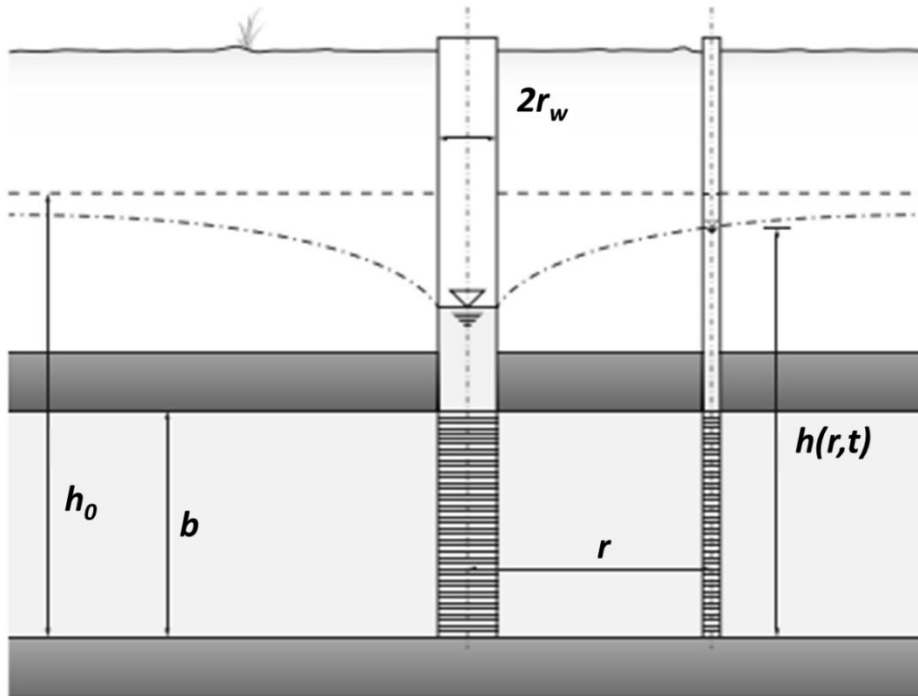


Figura 2. *Aquífero confinado.*



2.2. Aquífero confinado

L'acuífero confinado é um aquífero em pressão, delimitado a tecto e a letto da duas formações impermeáveis (**acuícludi**). Il conseqüente sistema poço-acuífero é idêntico ao mostrado na Figura 2. Desde que as condições da seção 2.1 sejam respeitadas, a equação diferencial que modela o sistema é:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7)$$

donde h é a carga hidráulica, r é a distância do centro do poço, t é o tempo, T é a transmissividade do aquífero, e S é o seu **coeficiente de armazenamento específico**. A solução analítica para (7) é devida a Theis, que por primeiro resolveu o problema utilizando a analogia com o transporte radial de calor de um sólido. A solução, conhecida como equação de Theis, é:

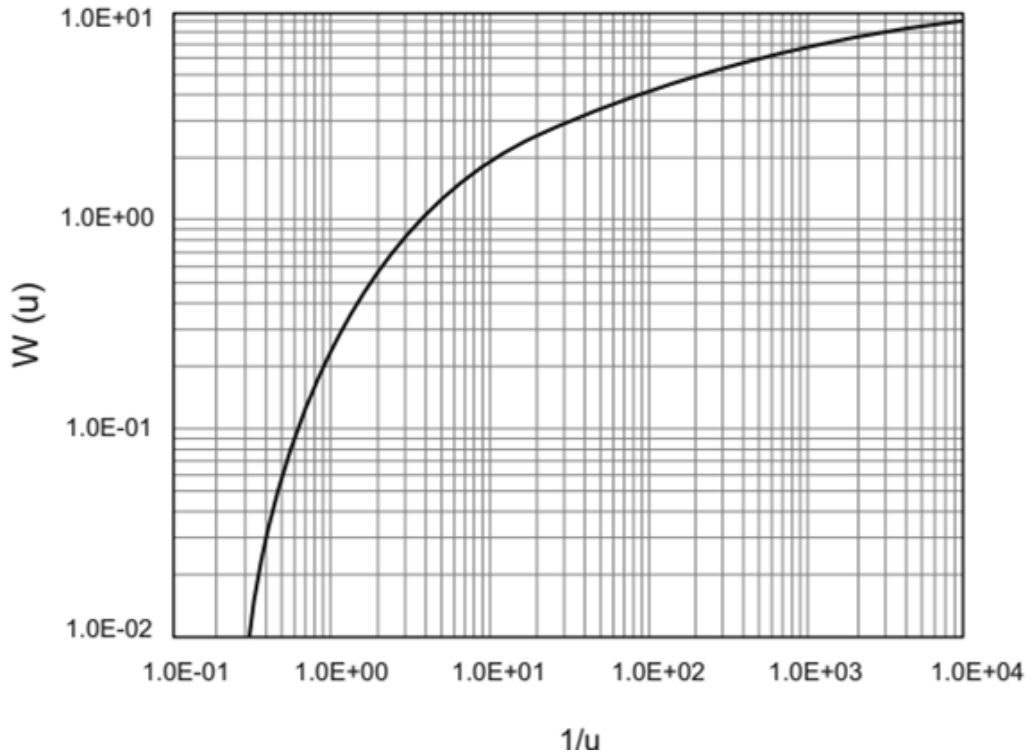
$$s(r,t) = h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (8)$$

donde h_0 é a carga inicial do poço, s é o abaixamento no tempo t , Q é a vazão volumétrica, e u é um parâmetro definido por

$$u = \frac{Sr^2}{4tT} \quad (9)$$

La espressione più a destra nell'equazione (8), il cui andamento è illustrato nella Figura 3, è nota nella matematica applicata come *integrale esponenziale*, $Ei(-u)$; nell'ingegneria degli acquiferi è usualmente indicata come **funzione pozzo di Theis**, $W(u)$.

Figura 3. Funzione pozzo di Theis.



La soluzione (8) che abbiamo ottenuto può pertanto scriversi nella forma sintetica:

$$s(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (10)$$

Tenuto conto che $1/u$ è proporzionale al tempo, la figura precedente dimostra che, in un acquifero confinato, l'abbassamento indotto dall'erogazione di una portata volumetrica costante ad una distanza generica dal pozzo in pompaggio continua ad aumentare nel tempo.

Problema 4 (Custodio e Llamas, 1983 [ESP]). ¿A qué caudal específico debe bombearse un pozo en un acuífero cautivo para que al cabo de 1 mes de bombeo ininterrumpido el descenso teórico no supere 12 metros? El radio del pozo es de 0.3 m y las características del acuífero son transmisividad $T = 200 \text{ m}^2/\text{dia}$ y capacidad de almacenamiento $S = 5 \times 10^{-3}$.

Respuesta. En primer lugar, calculamos el parámetro u ,

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} = \frac{0.3^2 \times (5 \times 10^{-3})}{4 \times 200 \times 30} = 1.88 \times 10^{-8}$$

Podemos entonces recurrir a una tabela com $W(u)$ y obtener $W(u = 1.88 \times 10^{-8}) \approx 17.21$. Resulta que el caudal máximo es

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \rightarrow Q_{\max} = \frac{4\pi T s_{\max}}{W(u)}$$

$$\therefore Q_{\max} = \frac{4\pi \times 200 \times 12}{17.21} = 1750 \text{ m}^3/\text{día} = \boxed{73.0 \text{ m}^3/\text{hora}}$$

Problema 5 (Fetter, 2014 [ENG]). A community is installing a new well in a regionally confined aquifer with a transmissivity of 5320 ft²/day and a storativity of 0.0007. The planned pumping rate is 165,000 ft³/day. There are several nearby wells tapping the same aquifer, and the project manager needs to know if the new well will cause significant interference with these wells. Compute the theoretical drawdown caused by the new well after 30 days of continuous pumping at the following distances: 50, 150, 250, 500, 1000, 3000, 5000 and 10,000 ft.

Answer. We already know that the drawdown s for any radial distance r from the well at a time t is given by **(10)**,

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u)$$

where argument u is given by $u = r^2 S / 4Tt$. Considering, for instance, the drawdown for a radial distance of 1000 ft, we substitute $r = 1000$ ft, $S = 0.0007$, $T = 5320$ ft²/day and $t = 30$ days to obtain

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} = \frac{1000^2 \times 0.0007}{4 \times 5320 \times 30} = 1.10 \times 10^{-3}$$

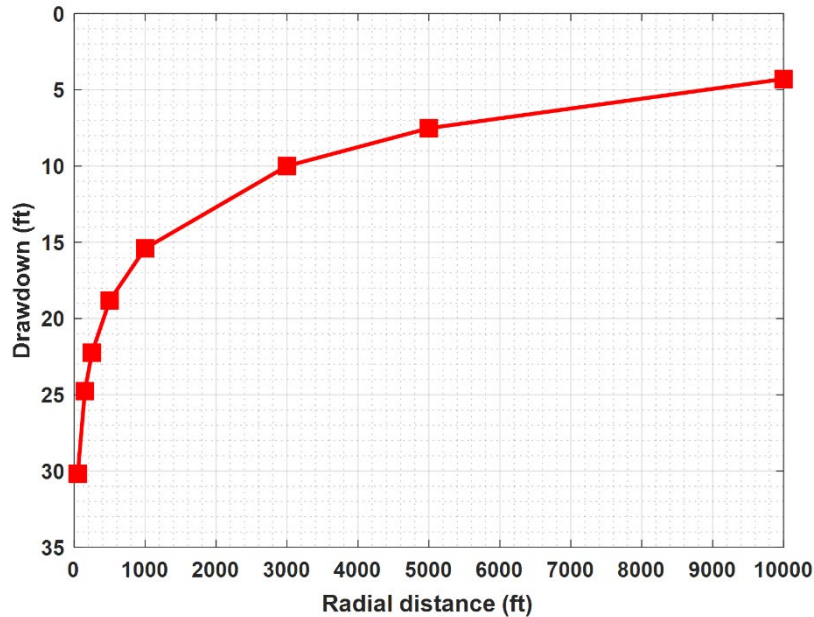
Referring to tabulated values of the Theis well function, we find $W(u) \approx 6.23$. Noting that $Q = 165,000$ ft³/day, the drawdown $s(r = 1000$ ft, $t = 30$ d) is

$$s(r, t) = \frac{165,000}{4\pi \times 5320} \times 6.23 = \underline{15.4 \text{ ft}}$$

Thus, the drawdown observed at a distance of 1000 ft from the well after 30 days of pumping is approximately 15.4 feet. Similar calculations apply for other radial distances. A drawdown–radial distance plot is shown on the next page.

2.2. Aquífero confinado

Un aquífero confinado é um aquífero sob pressão, delimitado no topo e na base por uma formação impermeável (**aquicludo**). O sistema poço-aquífero é semelhante ao mostrado na Figura 2. Supondo que as condições da seção 2.1 sejam respeitadas, a equação diferencial que modela o sistema é:



$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7)$$

Onde h é a carga hidráulica, r é a distância do centro do poço, t é o tempo, T é a transmissividade do aquífero e S é o seu **coeficiente de armazenamento**.

A solução analítica de (7) é devida a Theis, que obteve uma solução para o problema utilizando uma analogia com o transporte radial de calor a partir de um sólido. A solução, conhecida portanto como equação de Theis, é:

$$s(r, t) = h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (8)$$

onde h_0 é a carga inicial do poço, s é o rebaixamento no tempo t , Q é a vazão volumétrica e u é um parâmetro definido como

$$u = \frac{Sr^2}{4tT} \quad (9)$$

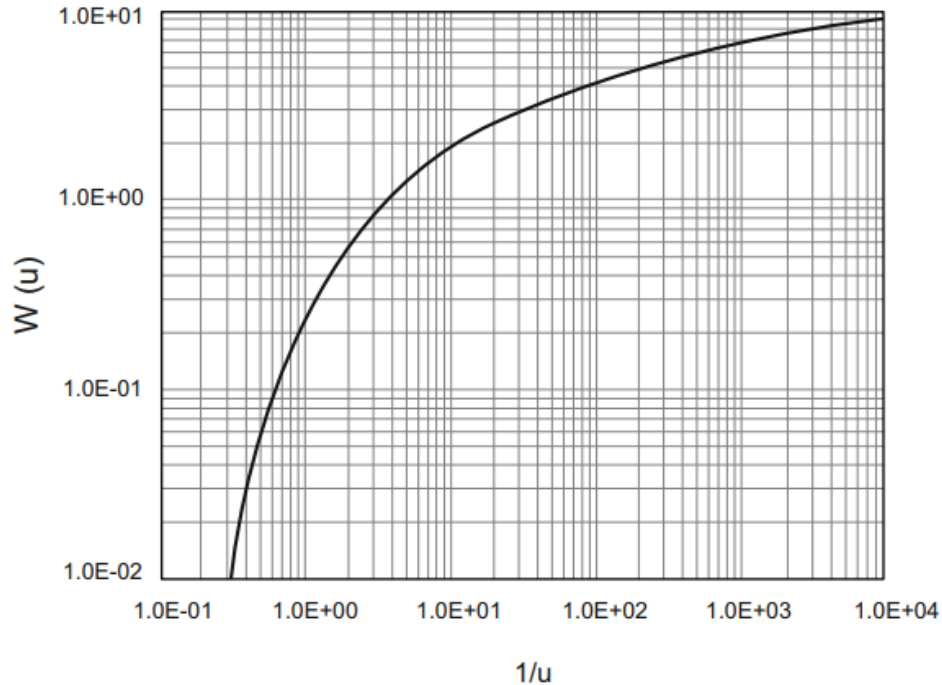
A integral mais à direita em (8), que é plotada na Figura 3, é conhecida na literatura matemática como *integral exponencial*, $Ei(-u)$; na literatura de engenharia de aquíferos, esta é chamada **função poço de Theis**, $W(u)$.

Por fim, podemos escrever (8) de maneira sintética:

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (10)$$

Sabendo que $1/u$ é proporcional ao tempo, a Figura 3 mostra que, em um aquífero confinado, o rebaixamento induzido pela dispensa de uma vazão volumétrica constante a uma distância genérica do poço sob bombeamento continua a crescer com o tempo.

Figura 3. Função poço de Theis.



Problema 4 (Custodio e Llamas, 1983). A que vazão específica deve-se bombear um poço em um aquífero confinado para que ao fim de um mês de bombeamento ininterrupto o rebaixamento teórico não supere 12 metros? O raio do poço é 0.3 m e as características do aquífero são transmissividade $T = 200 \text{ m}^2/\text{dia}$ e coeficiente de armazenamento $S = 5 \times 10^{-3}$.

Resposta. Em primeiro lugar, calculamos o parâmetro u ,

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} = \frac{0.3^2 \times (5 \times 10^{-3})}{4 \times 200 \times 30} = 1.88 \times 10^{-8}$$

Podemos então recorrer a uma tabela com valores de $W(u)$ e obter $W(u = 1.88 \times 10^{-8}) \approx 17.21$. Segue que a vazão máxima é

$$s(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \rightarrow Q_{\max} = \frac{4\pi T s_{\max}}{W(u)}$$

$$\therefore Q_{\max} = \frac{4\pi \times 200 \times 12}{17.21} = 1750 \text{ m}^3/\text{dia} = \boxed{73.0 \text{ m}^3/\text{hora}}$$

Problema 5 (Fetter, 2014). Uma comunidade está instalando um novo poço em um aquífero regionalmente confinado com transmissividade igual a $5320 \text{ ft}^2/\text{dia}$ e coeficiente de armazenamento igual a 0.0007 . A taxa de bombeamento planejada é $165,000 \text{ ft}^3/\text{dia}$. Há vários poços nas cercanias penetrando o mesmo aquífero, e o gestor de projeto busca saber se o novo poço interferirá com a atividade dos poços existentes. Compute o rebaixamento teórico causado pelo novo poço após 30 dias de bombeamento contínuo a distâncias radiais iguais a 50, 150, 250, 500, 1000, 3000, 5000 e 10,000 ft.

Resposta. Já sabemos que o rebaixamento s para qualquer distância radial r do poço em um tempo de bombeamento t é dado pela equação **(10)**,

$$s(r,t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u)$$

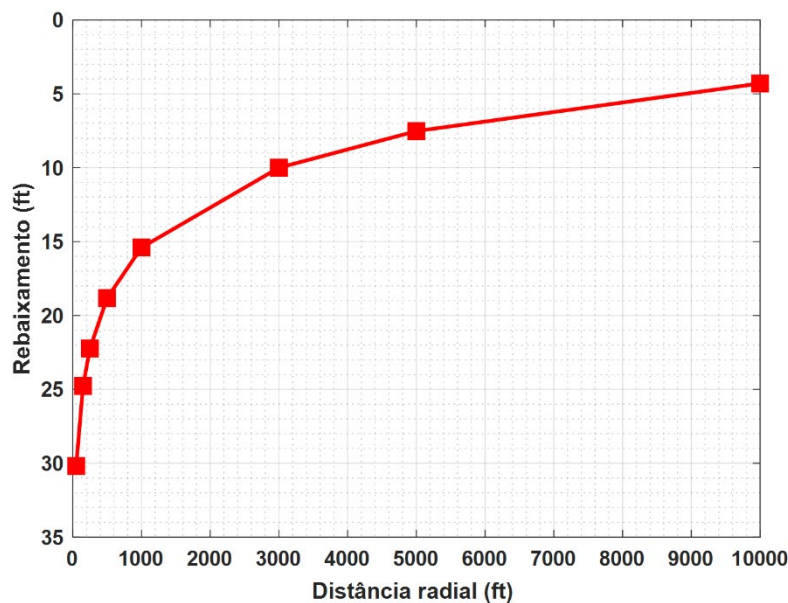
onde o argumento u é dado por $u = r^2 S / 4Tt$. Considerando, por exemplo, o rebaixamento para uma distância radial $r = 1000 \text{ ft}$, substituímos $S = 0.0007$, $T = 5320 \text{ ft}^2/\text{dia}$ e $t = 30 \text{ dias}$ para obter

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} = \frac{1000^2 \times 0.0007}{4 \times 5320 \times 30} = 1.10 \times 10^{-3}$$

Recorrendo a valores tabelados da função poço de Theis, encontramos $W(u) \approx 6.23$. Notando que $Q = 165,000 \text{ ft}^3/\text{dia}$, o rebaixamento $s(r = 1000 \text{ ft}; t = 30 \text{ d})$ torna-se

$$s(r,t) = \frac{165,000}{4\pi \times 5320} \times 6.23 = \underline{15.4 \text{ ft}}$$

Portanto, o rebaixamento observado a uma distância de 1000 ft do poço após 30 dias de bombeamento é aproximadamente igual a 15.4 pés. Cálculos semelhantes aplicam-se a outras distâncias radiais. Um gráfico de rebaixamento *versus* distância é mostrado a seguir.



▲ **Termos importantes**

■ **Acquiclude** (“Aquiclude”): Camada relativamente impermeável situada acima ou abaixo de um aquífero.

■ **Coefficiente di immagazzinamento specifico** (“Coeficiente de armazenamento”): Volume de água extraído de um aquífero por unidade de perda de carga hidráulica, por unidade de área. Quantidade adimensional.

■ **Funzione pozzo di Theis** (“Função poço de Theis”): Função análoga à chamada *integral exponencial*; a função poço de Theis é usualmente denotada por $W(u)$ e expressa como

$$W(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

onde u , conhecido como *argumento* de $W(u)$, é dado pela equação (9).

◆ **3. Analytical solutions for radial flow in a well – Hantush-Jacob well function**

↳ Referência 3 (Fetter, 2014), pp. 180 – 183. Com modificações.

Most natural aquifers are not totally isolated from sources of vertical recharge. Aquitards, either above or below the aquifer, can leak water into the aquifer if the direction of the hydraulic gradient is favorable. We can develop an analytical solution for an unsteady flow in a **leaky** or **semiconfined aquifer** such as the one illustrated in Figure 4. Before that, however, we must add the following assumptions to those already mentioned for the Theis theory:

1. The aquifer is bounded on the top by an aquitard.
2. The aquitard is overlain by an unconfined aquifer.
3. The water table in the unconfined aquifer is initially horizontal.
4. The water table in the unconfined aquifer does not fall during pumping of the aquifer.
5. Groundwater flow in the aquitard is vertical.
6. The aquifer is compressible, and water drains instantaneously with a decline in head.
7. The aquitard is incompressible, so that no water is released from storage in the aquitard when the aquifer is pumped.

The equation that governs flow afforded by a well in a leaky aquifer is

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{w}{T} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11)$$

where the only new term is w , which is the rate of vertical leakage. The analytical solution to the equation above was published by M.S. Hantush in the 1950s and can be expressed as

$$s(r,t) = h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{1}{y} \exp\left(-y - \frac{r^2}{4B^2 y}\right) dy \quad (12)$$

Here, all quantities have the same meaning as in the Theis equation. Also, y is no more than an integration variable and the novel parameter B , which is sometimes called the **leakage factor**, is given by

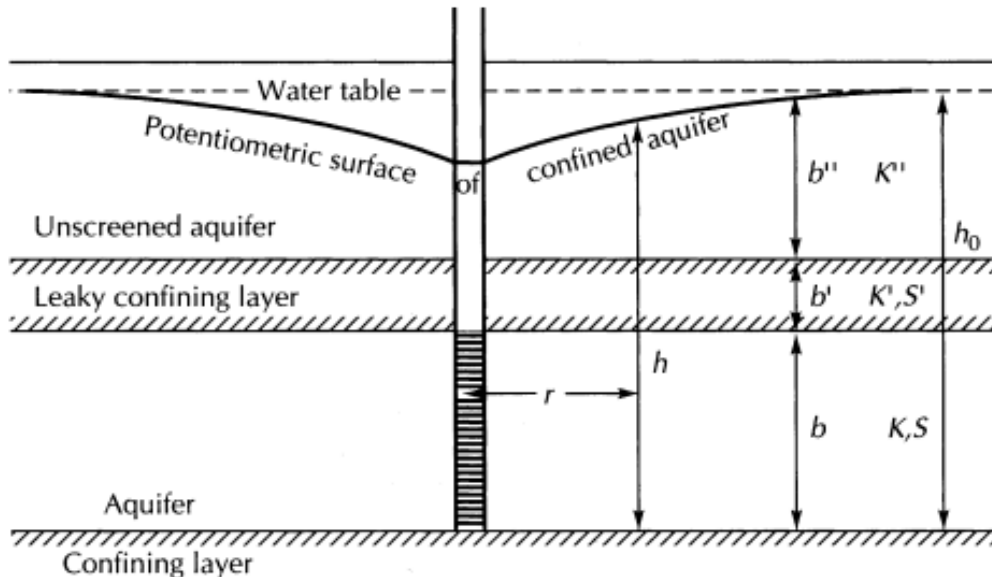
$$B = \sqrt{\frac{Tb'}{K'}} \quad (13)$$

in which T is the transmissivity of the confined aquifer, b' is the thickness of the aquitard, and K' is the vertical hydraulic conductivity of the aquitard. We can replace the integral in formula (12) by $W_{HJ}(u, r/B)$ and write

$$s(r,t) = h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} W_{HJ}\left(u, \frac{r}{B}\right) \quad (14)$$

Note that this equation is similar to the Theis equation for fully confined aquifers; what changes, crucially, is that the Theis well function $W(u)$ is replaced by the function $W_{HJ}(u, r/B)$, which is sometimes known as the **Hantush-Jacob well function**. It is a function of the argument u , radial distance r , and the leakage factor B , and can be found in tabulated form in various groundwater engineering textbooks.

Figure 4. Leaky/semiconfined aquifer.



Problem 6. A community is installing a new well in a regionally confined aquifer with a transmissivity of 5320 ft²/day and a storativity of 0.0007. The planned pumping rate is 165,000 ft³/day. There are several nearby wells tapping the same aquifer, and the project manager needs to know if the new well will cause significant interference with these wells. Compute the theoretical drawdown caused by the new well after 30 days of continuous pumping at the following distances: 50, 150, 250, 500, 1000, 3000, 5000 and 10,000 ft. **Answer.** As an example, we carry out the calculations for $r = 1000$ ft. We first compute argument u (whose value is identical to the one obtained in problem 5)

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} = \frac{1000^2 \times 0.0007}{4 \times 5320 \times 30} = 1.10 \times 10^{-3}$$

Then, we compute the leakage factor B ,

$$B = \sqrt{\frac{Tb'}{K'}} = \sqrt{\frac{5320 \times 8}{0.034}} = 1120 \text{ ft}$$

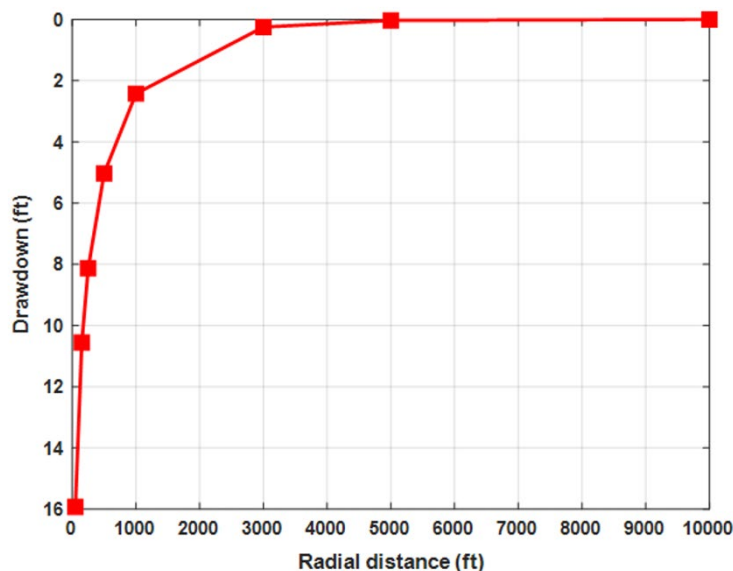
Referring to tabulated values of the Hantush-Jacob well function, we find

$$W_{HJ} \left(u = 1.10 \times 10^{-3}, \frac{r}{B} = 0.893 \right) = 0.984$$

Then, the drawdown s is determined as

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W_{HJ}(u) = \frac{165,000}{4\pi \times 5320} \times 0.984 = 2.43 \text{ ft}$$

Thus, the drawdown observed at a distance of 1000 ft from the well after 30 days of pumping is approximately 2.4 feet. Similar calculations apply for other radial distances. A drawdown–radial distance plot is shown next.



3. Soluções analíticas para escoamento radial em um poço – Função de poço de Hantush-Jacob

A maior parte dos aquíferos naturais não está isolada de fontes de recarga vertical. Aquíferos, acima ou abaixo do aquífero, podem infiltrar água adentro do aquífero se a direção do gradiente hidráulico for favorável. Podemos desenvolver uma solução analítica para escoamento não permanente em um **aquífero gotejante** ou **semiconfinado** como o ilustrado na Figura 4. Antes disso, no entanto, temos de acrescentar as seguintes hipóteses simplificadoras às mencionadas na derivação da teoria de Theis:

1. O aquífero é delimitado no topo por um aquítarde;
2. Há um aquífero não-confinado sobrejacente ao aquítarde;
3. O nível d'água no aquífero não confinado é inicialmente horizontal;
4. O nível d'água no aquífero não confinado não é reduzido durante o bombeamento do aquífero;
5. O escoamento de águas subterrâneas no aquítarde é vertical;
6. O aquífero é compressível, e água é instantaneamente drenada com uma queda de elevação;
7. O aquítarde é incompressível, de modo que o aquítarde não perde água nele armazenada quando o aquífero é bombeado.

A equação que governa o escoamento produzido por um poço em um aquífero gotejante é

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{w}{T} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11)$$

onde a única nova variável é w , que representa a taxa de infiltração vertical. A solução analítica da equação (11) foi publicada por M.S. Hantush nos anos 1950 e pode ser escrita como

$$s(r, t) = h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{1}{y} \exp\left(-y - \frac{r^2}{4B^2 y}\right) dy \quad (12)$$

onde todas as variáveis têm significados idênticos à equação de Theis. Ademais, y é apenas uma variável de integração e B , por vezes conhecido como **fator de gotejamento**, é dado por

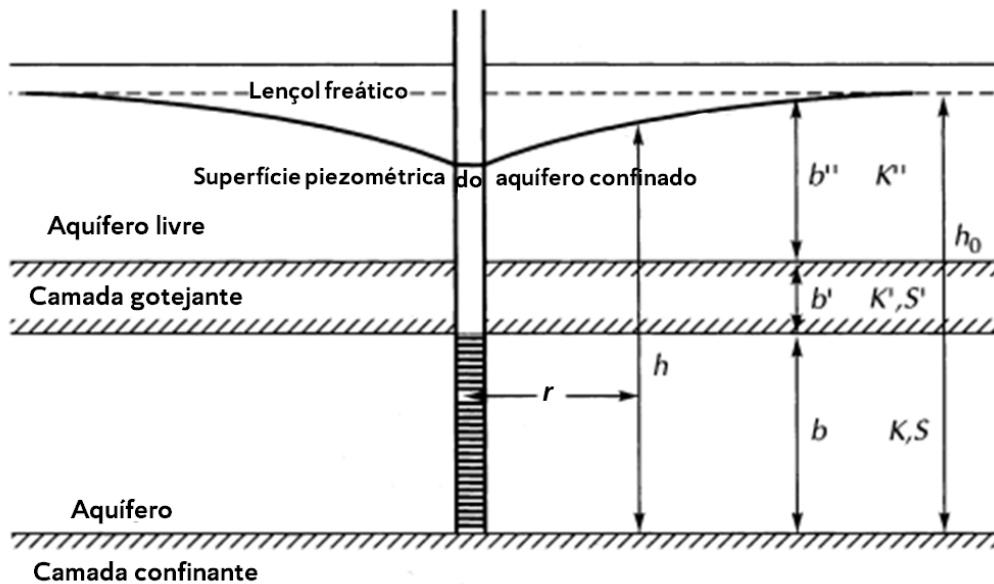
$$B = \sqrt{\frac{Tb'}{K'}} \quad (13)$$

onde T é a transmissividade do aquífero confinado, b' é a espessura do aquítarde e K' é a condutividade hidráulica vertical do aquítarde. Podemos substituir a integral na fórmula (12) por $W_{HJ}(u, r/B)$ e escrever

$$s(r, t) = h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} W_{HJ}\left(u, \frac{r}{B}\right) \quad (14)$$

Note que essa equação é similar à equação de Theis para aquíferos completamente confinados; o que muda, no entanto, é que a função poço de Theis $W(u)$ é substituída pela função $W_{HJ}(u, r/B)$, que é por vezes denominada **função poço de Hantush-Jacob**. Esta é uma função do argumento u , da distância radial r e do fator de gotejamento B ; tabelas com valores de W_{HJ} podem ser encontradas na literatura de águas subterrâneas.

Figura 4. Aquífero gotejante/semiconfinado.



Problema 6 (Fetter, 2014). Uma comunidade está instalando um novo poço em um aquífero regionalmente confinado com transmissividade igual a $5320 \text{ ft}^2/\text{dia}$ e coeficiente de armazenamento igual a 0.0007 . A taxa de bombeamento planejada é $165,000 \text{ ft}^3/\text{dia}$. Há vários poços nas cercanias penetrando o mesmo aquífero, e o gestor de projeto busca saber se o novo poço interferirá com a atividade dos poços existentes. Compute o rebaixamento teórico causado pelo novo poço após 30 dias de bombeamento contínuo a distâncias radiais iguais a 50, 150, 250, 500, 1000, 3000, 5000 e 10,000 ft.

Resposta. Como exemplo, realizamos os cálculos para $r = 1000 \text{ ft}$. O primeiro passo é computar o argumento u (cujo valor é idêntico àquele obtido no cálculo-exemplo do problema 5),

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} = \frac{1000^2 \times 0.0007}{4 \times 5320 \times 30} = 1.10 \times 10^{-3}$$

Em seguida, determinamos o fator de gotejamento B ,

$$B = \sqrt{\frac{Tb'}{K'}} = \sqrt{\frac{5320 \times 8}{0.034}} = 1120 \text{ ft}$$

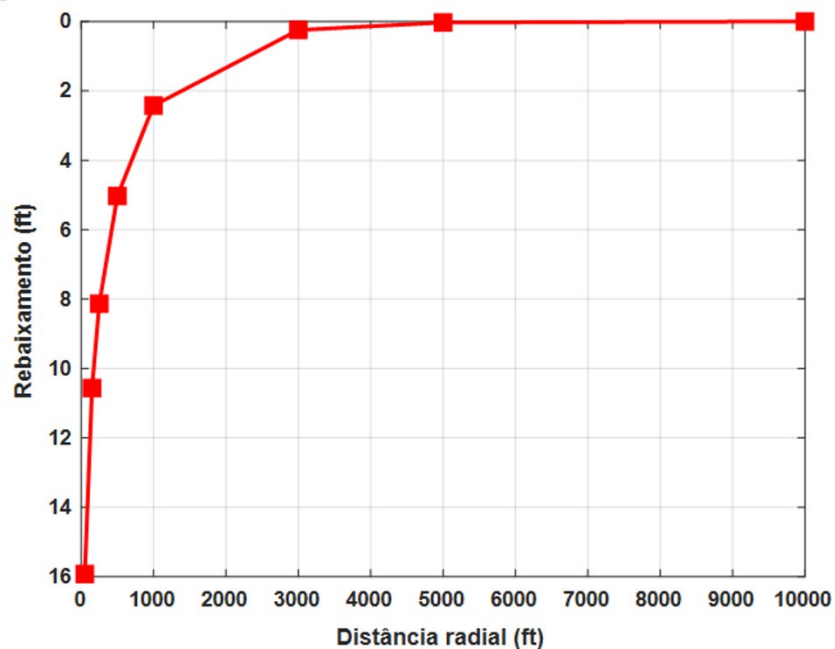
Recorrendo a valores tabelados da função poço de Hantush-Jacob, encontramos

$$W_{HJ} \left(u = 1.10 \times 10^{-3}, \frac{r}{B} = 0.893 \right) = 0.984$$

Segue que o rebaixamento s é

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W_{HJ}(u) = \frac{165,000}{4\pi \times 5320} \times 0.984 = 2.43 \text{ ft}$$

Portanto, o rebaixamento observado a uma distância de 1000 ft do poço após 30 dias de bombeamento é aproximadamente igual a 2.4 pés. Cálculos semelhantes aplicam-se a outros valores de distância radial. Um gráfico de rebaixamento versus distância é mostrado a seguir.



▲ Termos importantes

■ **Leaky/semiconfinado aquífer** ("Aquífero gotejante/semiconfinado"): Diz-se que um aquífero é semiconfinado ou gotejante quando for delimitado por uma superfície impermeável (geralmente subjacente ao aquífero) e outra (geralmente sobrejacente) capaz de infiltrar água para o aquífero.

■ **Leakage factor** ("Fator de gotejamento"): Parâmetro que aparece na função poço de Hantush-Jacob. Este é usualmente denotado por B ou λ e pode ser calculado com a equação (13).

■ **Hantush-Jacob well function** ("Função poço de Hantush-Jacob"): Função especial que aparece na solução analítica de rebaixamento de poços em aquíferos semiconfinados. A função é usualmente denotada por $W_{HJ}(u, r/B)$ e pode ser calculada pela integral no lado direito de (12).



A **Lotka** oferece uma variedade de serviços de tradução, revisão e composição.

www.lotkatranslation.com



Tradução técnica

Traduzimos artigos, manuscritos e outros gêneros textuais em 8 idiomas.



Revisão técnica

Melhoramos a qualidade gramatical e estilística do seu documento.



Jargão e terminologia

Dominamos as terminologias e jargões de diversas áreas de engenharia e ciências naturais.



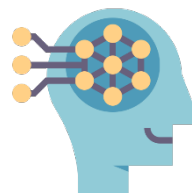
Edição de referências bibliográficas

Preparamos listas de referências em 4 padrões diferentes (ABNT, Harvard, APA, MLA).



Edição de expressões matemáticas

Preparamos as equações, reações químicas, tabelas e outros elementos especiais do seu documento.



Revisão de documentos gerados por inteligência artificial

Tecnologias de inteligência artificial generativa são ainda incipientes e propensas a erro. A Lotka pode melhorar a qualidade técnica de textos gerados ou traduzidos por IA.