Lotka

Tradução Técnica

■ Excerto 2: Flambagem de colunas

■ Excerpt 2: Column buckling

◆ Lucas Monteiro Nogueira

Nº	Título	Idioma	Referência
1	**Pandeo de columnas** (Flambagem de colunas)	**Espanhol → Português**	Beer et al. (2017)

◆ Referências

1. Beer, F.P., Johnston, E.R. Jr., DeWolf, J.T. e Mazurek, D.F. (2017). *Mecánica de materiales*. 7ª edição. McGraw–Hill. (Traduzido da versão americana).

◆ Índice

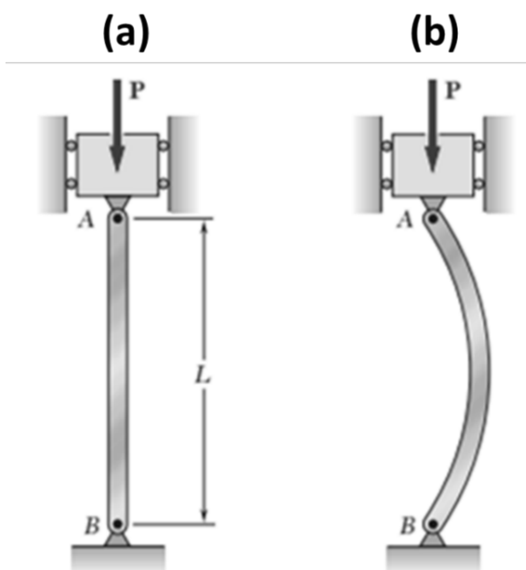
◆ 1. Pandeo de columnas

↳ *Referencia 1 (Beer* et al.*, 2017), pp. 614 – 619. Com modificações.*

1.1. La fórmula básica de Euler

Con base en la columna erguida *AB* mostrada en la Figura 1a, se busca hallar el valor crítico de la carga **P**, es decir, el valor P_{cr} de la carga para el cual la posición de la columna deja de ser estable. Si $P > P_{cr}$, la menor falta de alineación o perturbación provocará que la columna *se pandee*, es decir, que adopte una forma curva como en la Figura 1b. El propósito será determinar las condiciones para que la configuración de la figura sea posible.

Figura 1. *Columna cargada axialmente (a) erguida; (b) pandeada.*



Se denotará por x la distancia desde el extremo A de la columna hasta un punto dado Q de la curva elástica, y por y la deflexión de dicho punto. El eje x será vertical y dirigido hacia abajo, y el eje y horizontal y dirigido a la derecha. El momento en un punto a lo largo de la columna es $M = -Py$. Sustituyendo este valor de M en la ecuación de flexión, tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \quad \textbf{(1)}$$

Transponiendo el último término,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Tenemos una ecuación diferencial lineal, homogénea, de segundo orden, con coeficientes constantes. Haciendo $p^2 = P/EI$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = 0 \quad \textbf{(3)}$$

cuya solución general es

$$y = A\sin(px) + B\cos(px) \quad \textbf{(4)}$$

Hay dos condiciones de frontera que debemos imponer en este caso. Primero se hace $x = 0$, $y = 0$, donde podemos naturalmente obtener $B = 0$. Sustituyendo em seguida $x = L$, $y = 0$, obtenemos

$$A\sin(pL) = 0 \quad \textbf{(5)}$$

Esta ecuación se satisfice para $A = 0$ o si $sin(pL) = 0$. Si ocurre lo primero, la ecuación para y se reduce a $y = 0$ y la columna es recta. Si se satisface la segunda, entonces $pL = n\pi$ o, sustituyendo p y resolviendo para la carga P,

$$pL = n\pi \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi$$

$$\therefore \frac{P}{EI}L^2 = n^2\pi^2$$

$$\therefore P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \quad \textbf{(6)}$$

El menor de los valores de P definido por la ecuación arriba es correspondiente a $n = 1$, entonces

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \textbf{(7)}$$

Ésta es la **fórmula de Euler**, llamada sí em honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783). Sustituyendo esta expresión para P en la definición de p y insertando en la solución general obtenida anteriormente, obtenemos

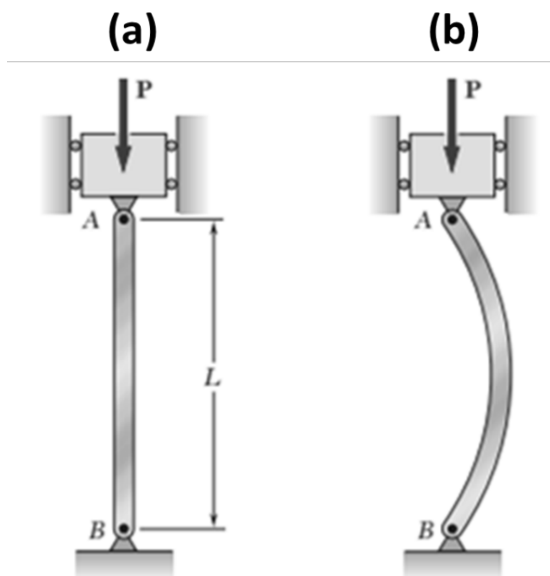
$$y = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \textbf{(8)}$$

que es la ecuación de la curva elástica después de haberse doblado la columna. Note que el valor de la deflexión máxima, $y_m = A$, es indeterminado. Esto se debe a que la ecuación diferencial que describe la flexión es uma aproximación linealizada de la ecuación diferencial que define la curva elástica.

1.1. A fórmula básica de Euler

Com base na coluna ereta *AB* mostrada na Figura 1a, buscamos o valor crítico da carga **P**, isto é, o valor P_{cr} da carga para o qual a posição da coluna deixa de ser estável. Se $P > P_{cr}$, a menor falta de alinhamento ou perturbação fará com que a coluna se flambe, ou seja, adote uma forma curva como ilustrado na Figura 1b. O objetivo é determinar as condições para que a configuração mostrada na figura seja possível.

Figura 1. *Coluna carregada axialmente (a) erguida; (b) flambada.*



Denotamos por *x* a distância entre a extremidade *A* da coluna até um dado ponto *Q* da linha elástica; denotamos por *y* a deflexão do ponto *Q*. O eixo *x* será vertical e voltado para baixo e o eixo *y* será horizontal e positivo para a direita. O momento em um ponto ao longo da coluna é $M = -Py$. Substituindo esse valor de *M* na fórmula da flexão, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \quad \textbf{(1)}$$

Transpondo o ultimo termo para o lado esquerdo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Temos uma equação diferencial linear, homogênea, de segunda ordem com coeficientes constantes. Fazendo $p^2 = P/EI$, podemos escrever **(2)** como

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0 \quad \textbf{(3)}$$

cuja solução geral é

$$y = A\sin(px) + B\cos(px) \quad \textbf{(4)}$$

Há duas condições de contorno para impor. Primeiro, fazendo $x = 0$, $y = 0$, tem-se que $B = 0$. Em seguida, substituindo $x = L$, $y = 0$, obtemos

$$A\sin(pL) = 0 \quad \textbf{(5)}$$

Esta igualdade é satisfeita se $A = 0$ ou $sin(pL) = 0$. No primeiro caso, **(5)** reduz–se a $y = 0$ e a coluna estará ereta. Recorrendo à segunda condição, tem-se $pL = n\pi$; portanto, substituindo p e resolvendo para a carga P,

$$pL = n\pi \quad \to \quad \sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi$$

$$\therefore \frac{P}{EI}L^2 = n^2\pi^2$$

$$\therefore P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \quad \textbf{(6)}$$

O menor valor de P corresponde a $n = 1$, então

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \textbf{(7)}$$

Essa é a **formula de Euler**, assim chamada em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783). Substituindo essa expressão para P na definição do parâmetro p e inserindo na solução geral **(4)**, obtemos:

$$y = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \textbf{(8)}$$

que é a equação da linha elástica após o dobramento da coluna. Note que o valor da deformação máxima, $y_m = A$, é indeterminado. Isso ocorre porque a equação diferencial que descreve a flambagem de uma coluna é uma aproximação linearizada da equação diferencial que descreve a linha elástica.

1.2. Fórmula de Euler para columnas con otras condiciones en los extremos

La fórmula de Euler se dedujo en la sección precedente para una columna articulada en ambos extremos. Ahora consideraremos la carga crítica P_{cr} para columnas con otras condiciones en los extremos.

Una columna con un extremo libre en *A* (Figura 2a) que soporta una carga *P* y con um extremo fijo *B* se comporta como la mitad superior de una columna articulada. Entonces, la carga crítica para la columna de la Fig. 2a es igual que para la columna articulada en los extremos de la Figura 2*b* y puede obtenerse mediante la fórmula de Euler, ecuación **(7)**, usando una columna de longitud igual al doble de la longitud real *L*. Se dice que la longitud efectiva L_e de la columna de la Figura 2b es igual a 2*L* y se substituye $L_e = 2L$ en la fórmula de Euler:

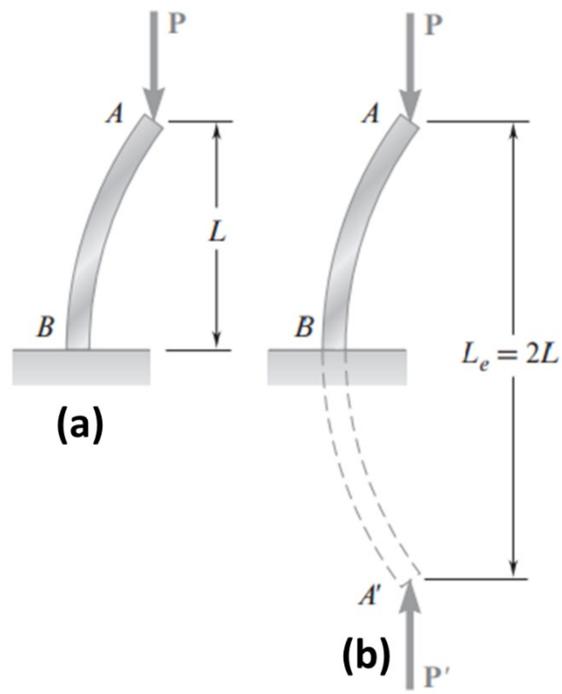
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad \textbf{(9)}$$

El **esfuerzo crítico** es

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E \times \cancel{A} r^2}{\cancel{A} L^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(L_e/r\right)^2} \quad \textbf{(10)}$$

donde usamos $I = A \times r^2$, siendo *A* el área de la sección trasnversal y *r* el radio de giro. La cantidad L_e/r se denomina **relación efectiva de esbeltez** de la columna y para la Figura 2a es igual a $2L/r$.

Figura 2. *(a) Columna con una extremidad fixa e (b) columna equivalente con longitud efectiva $L_e = 2L$.*



Ahora considere una columna con dos extremos fijos *A* y *B* que soporta una carga *P* (Figura 3). La simetria de los apoyos y de la carga con respecto a un eje horizontal a través del punto medio *C* requiere que la fuerza cortante en *C* y las componentes horizontales de las reacciones *A* y *B* sean cero (Figura 4). Por lo tanto, las restricciones impuestas sobre la mitad superior *AC* de la columna por el soporte en *A* y por la mitad inferior *CB* son idénticas (Figura 5). La porción *AC* debe ser simétrica con respecto a su punto medio *D* y éste debe ser un punto de inflexión, con momento flector cero. El momento flector en el punto medio *E* de la mitad inferior de la columna también debe ser cero (Figura 6a). Puesto que el momento flector en los extremos de una columna articulada es cero, la porción *DE* de la columna en la Figura 6a debe comportarse como una columna articulada en los extremos (Figura 6b). Así, la longitud efectiva de una columna con dos extremos fijos es $L_e = L/2$.

Figura 3. *Columna con extremos fijos.*

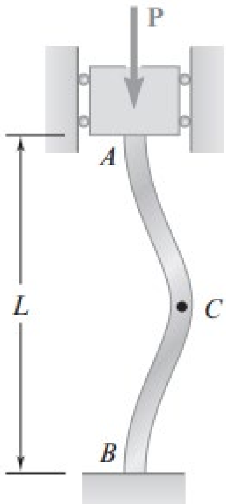


Figura 4. *Columna con extremos fijos pandeada.*

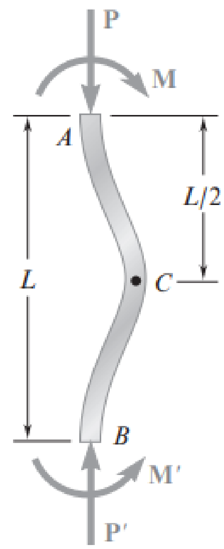


Figura 5. *Diagrama de cuerpo libre de la mitad superior de una columna com extremos fijos.*

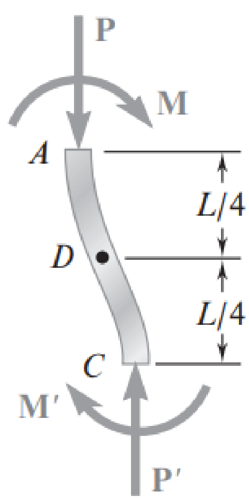
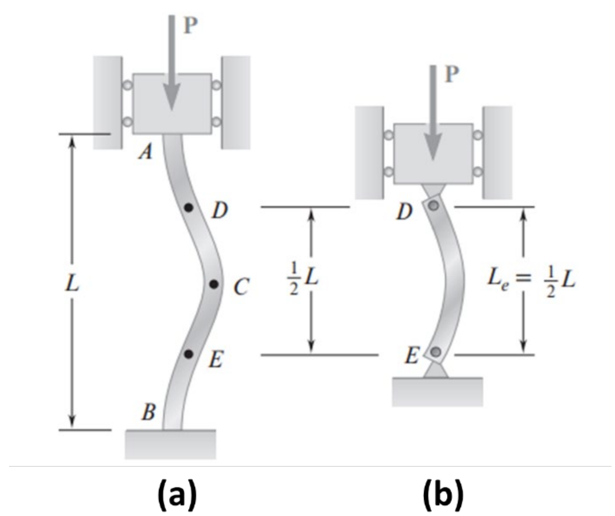


Figura 6. *La longitud efetiva de uma columna com extremos fijos es L/2.*



En una columna con un extremo fijo *B* y un extremo articulado *A* que sostiene una carga P (Figura 7), deberá resolverse la ecuación diferencial de la curva elástica para determinar la longitud efectiva. En el diagrama de cuerpo libre de la columna entera (Figura 8), se ejerce una fuerza transversal **V** en el extremo *A*, además de la carga axial **P**, y que **V** es estáticamente indeterminada. Considerando el diagrama de cuerpo libre de una porción *AQ* de la columna (Figura 9), el momento flector en *Q* es:

$$M = -Py - Vx \quad \textbf{(11)}$$

Figura 7. *Columna con um extremo fijo y outro articulado.*

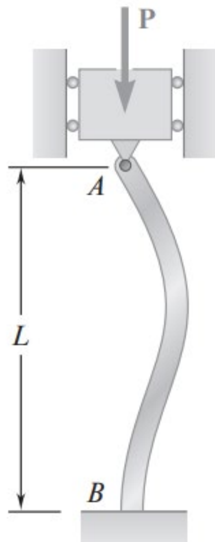


Figura 8. *Diagrama de cuerpo libre de uma columna pandeada con un extremo fijo y otro articulado.*

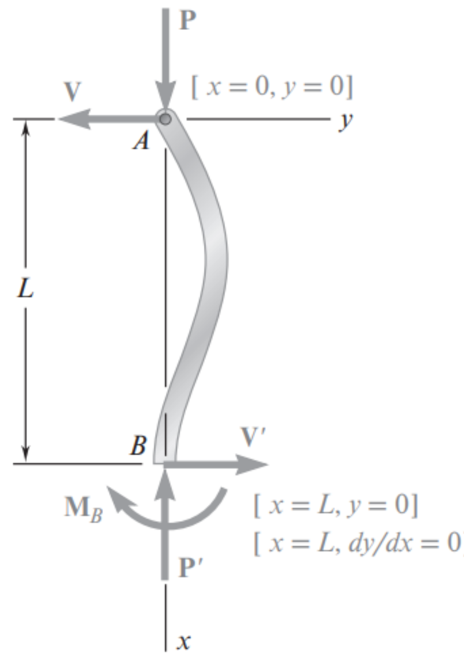
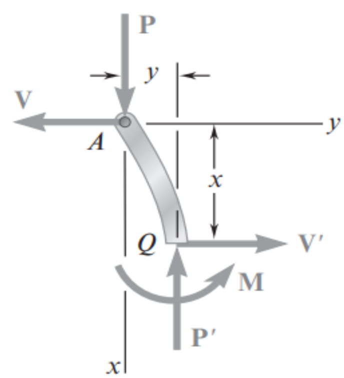


Figura 9. *Diagrama de cuerpo libre de la porción AQ uma coluna flambada com um extremo fixo e outro articulado.*



Sustituyendo esto en la ecuación diferencial que gobierna la curva elástica, obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{V}{EI}x \quad \textbf{(12)}$$

Al transponer el término que contiene a y y haciendo $p^2 = P/EI$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p^2y=-\frac{V}{EI}x \quad \textbf{(13)}$$

Esta ecuación diferencial es lineal, no homogénea y de segundo orden com coeficientes constantes. La solución particular es

$$y=-\frac{V}{p^2EI}x \quad \textbf{(14)}$$

o, empleando la definición de *p*,

$$y=-\frac{V}{\frac{P}{EI}\times EI}x=-\frac{V}{P}x \quad \textbf{(15)}$$

Al añadir las soluciones de las ecuaciones **(4)** y **(15)**, la solución general de **(13)** es

$$y=A\sin(px)+B\cos(px)-\frac{V}{P}x \quad \textbf{(16)}$$

Las constantes *A* y *B* y la magnitud *V* de la fuerza transversal **V** no conocida se obtienen de las condiciones de frontera indicadas en la Figura 8. Al hacer $x = 0$, $y = 0$, es visible que $B = 0$. Al hacer $x = L$, $y = 0$, resulta:

$$y=A\sin(px)-\frac{V}{P}x \quad \rightarrow \quad y=A\sin(pL)-\frac{V}{P}L=0$$

$$\therefore A\sin(pL)=\frac{V}{P}L \quad \textbf{(17)}$$

Si se obtiene la derivada de la ecuación **(16)** con $B = 0$,

$$\frac{dy}{dx}=Ap\cos(px)-\frac{V}{P} \quad \textbf{(18)}$$

y al hacer $x = L$, $dy/dx = 0$,

$$Ap\cos(pL)=\frac{V}{P} \quad \textbf{(19)}$$

Al dividir miembro a miembro la ecuación **(17)** por la ecuación **(19)**, una solución de la forma **(16)** puede existir solo si

$$\frac{\cancel{A}\sin(pL)}{\cancel{A}p\cos(pL)}=\frac{\cancel{(V/P)}L}{\cancel{(V/P)}}$$

$$\therefore \tan(pL) = pL \quad \textbf{(20)}$$

Al resolver esta ecuación por prueba y error, el menor valor de *pL* que satisface **(20)** es

$$pL = 4.4934 \quad \textbf{(21)}$$

Llevando el valor de *p* de la ecuación **(21)** hasta la ecuación $p^2 = P/EI$ y despejando *P*, la carga crítica de la columna de la Figura 7 es

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{L^2} \quad \textbf{(22)}$$

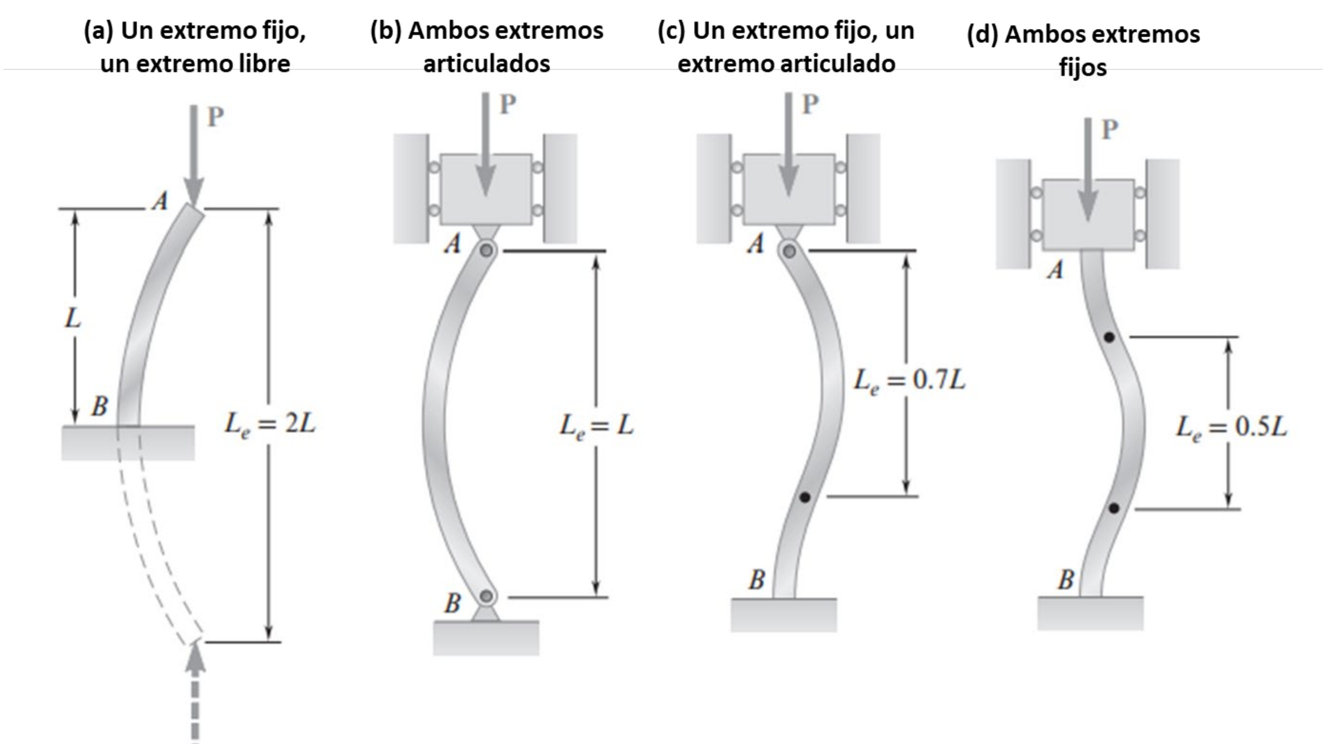
La longitude efectiva de la columna se encuentra igualando los miembros derechos de las ecuaciones **(9)** y **(22)**,

$$\frac{\pi^2 \cancel{EI}}{L_e^2} = \frac{20.19\cancel{EI}}{L^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{L_e^2} = \frac{20.19}{L^2}$$

$$\therefore L_e = \sqrt{\frac{\pi^2}{20.19}}L$$

$$\therefore L_e = 0.699L \approx 0.70L \quad \textbf{(23)}$$

Figura 10. *Longitud efectiva de columnas con varias condiciones em los extremos.*



Por lo tanto, la longitud efectiva para una columna con un extremo fijo y un extremo articulado es aproximadamente igual a 0.70*L*.
La Figura 10 en la página siguiente muestra las longitudes efectivas correspondientes a las diferentes condiciones de extremo.

1.2. Fórmula de Euler para colunas com outras condições nas extremidades

Na seção anterior, derivamos a fórmula de Euler para uma coluna biarticulada. Consideramos agora a carga crítica P_{cr} para colunas com outras configurações nas extremidades.

Uma coluna com uma extremidade livre em *A* (Figura 2a) suportando uma carga *P* e uma extremidade engastada *B* se comporta como a metade superior de uma coluna biarticulada. Sendo assim, a carga crítica na coluna da Fig. 2a é igual àquela da coluna biarticulada mostrada na Figura 2b, e pode ser determinada com a fórmula de Euler, equação **(7)**, supondo uma coluna de comprimento igual ao dobro do comprimento real *L*. Diz-se que o comprimento de flambagem L_e da coluna da Fig. 2b é igual a 2*L*. Substituindo na fórmula de Euler,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad \textbf{(9)}$$

A tensão ou **esforço crítico** é:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E \cancel{A} r^2}{\cancel{A} L^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(L_e/r\right)^2} \quad \textbf{(10)}$$

onde usamos $I = A \times r^2$, sendo *A* a área de seção transversal da coluna e *r* seu raio de giração. A razão L_e/r é denominada **índice de esbeltez** e para a coluna da Fig. 2a é igual a $2L/r$.

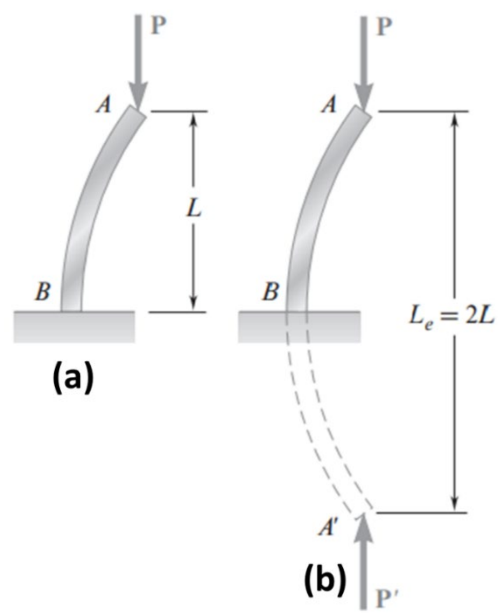


Figura 2. *(a) Coluna com uma extremidade engastada e (b) coluna equivalente com comprimento de flambagem $L_e = 2L$.*

Considere agora uma coluna com dois extremos engastados *A* e *B* suportando uma carga *P* (Figura 3). A simetria dos apoios e da carga relativamente a um eixo horizontal passando pelo ponto médio *C* exige que a força cortante em *C* e as componentes horizontais das reações *A* e *B* sejam nulas (Figura 4). Portanto, as restrições impostas ao segmento superior *AC* da coluna e seu suporte em *A* e ao segmento inferior *CB* são idênticas (Figura 5). O segmento *AC* deve ser simétrico com relação ao ponto médio *D* e este ponto deve ser um ponto de inflexão, isto é, um ponto com momento fletor zero (Figura 6a). Posto que o momento fletor nos extremos de uma coluna biarticulada é igual a zero, a porção *DE* da coluna ilustrada na Figura 6a deve se comportar como uma coluna biarticulada (Fig. 6b). Segue que o comprimento de flambagem de uma coluna biengastada é $L_e = L/2$.

Figura 3. *Coluna biengastada.*

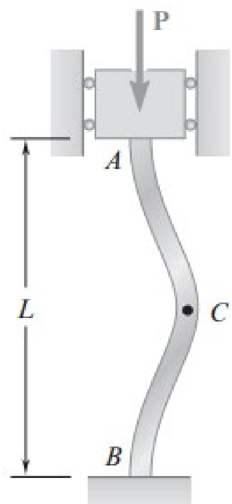


Figura 4. *Coluna biengastada sob flambagem.*

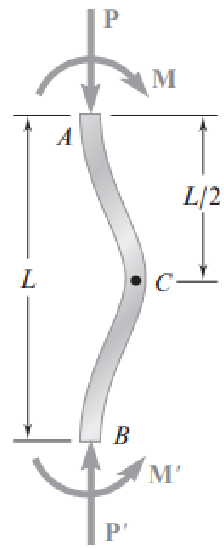


Figura 5. *Diagrama de corpo livre da metade superior de uma coluna com extremos fixos.*

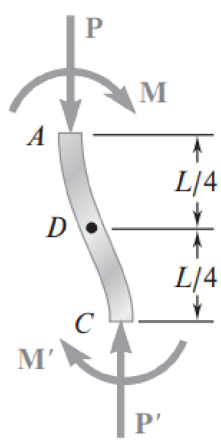


Figura 6. *O comprimento de flambagem de uma coluna com extremos fixos é L/2.*

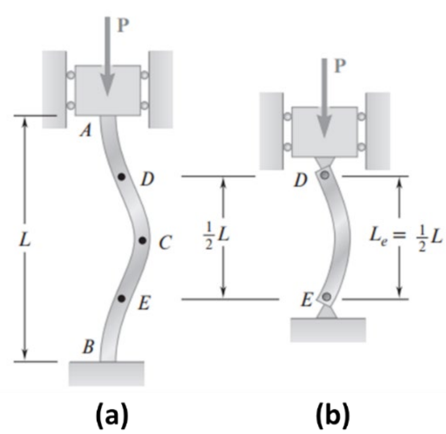


Figura 7. *Coluna com um extremo fixo e outro articulado.*

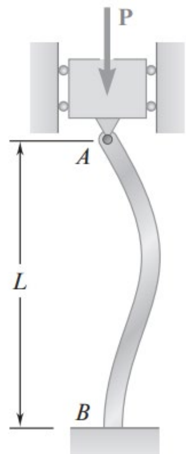


Figura 8. *Diagrama de corpo livre de uma coluna flambada com um extremo fixo e outro articulado.*

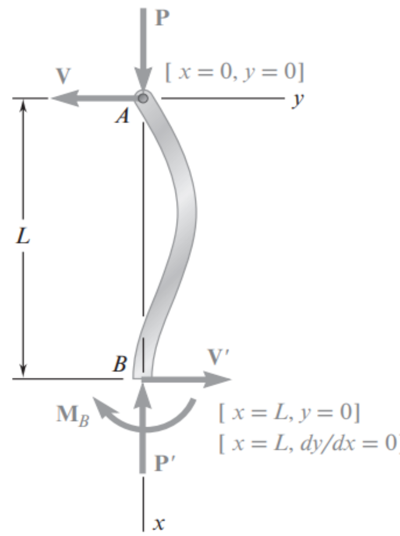
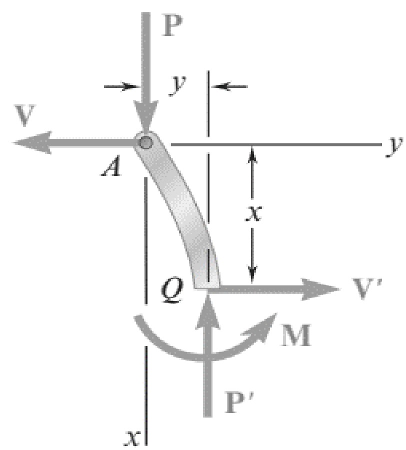


Figura 9. *Diagrama de corpo livre da porção AQ AQ de uma coluna flambada com um extremo fixo e outro articulado.*



Consideramos agora uma coluna com uma extremidade engastada *B* e outra extremidade articulada *A*; a coluna está sob o efeito de uma carga axial *P* (Figura 7). Devemos resolver a equação diferencial da linha elástica para determinar o comprimento de flambagem desse arranjo. No diagrama de corpo livre da coluna completa (Figura 8), é exercida uma força transversal **V** na extremidade *A*, além da carga axial **P**, e sabe-se que **V** é estaticamente indeterminada. Considerando o diagrama de corpo livre de uma porção *AQ* da coluna (Figura 9), o momento fletor em *Q* é:

$$M = -Py - Vx \quad \textbf{(11)}$$

Substituindo na equação diferencial que descreve a linha elástica, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{V}{EI}x \quad \textbf{(12)}$$

Transpondo o termo que contém *y* e fazendo $p^2 = P/EI$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p^2y=-\frac{V}{EI}x \quad \textbf{(13)}$$

Esta é uma equação diferencial linear, homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução particular é

$$y=-\frac{V}{p^2EI}x \quad \textbf{(14)}$$

ou, empregando a definição de *p*,

$$y=-\frac{V}{\dfrac{P}{EI}\times EI}x=-\frac{V}{P}x \quad \textbf{(15)}$$

Combinando as soluções das equações **(4)** e **(15)**, a solução geral de **(13)** é

$$y=A\sin(px)+B\cos(px)-\frac{V}{P}x \quad \textbf{(16)}$$

As constantes *A* e *B* e a magnitude *V* da força transversal **V** desconhecida podem ser obtidas a partir das condições de contorno indicadas na Figura 8. Fazendo $x = 0$, $y = 0$, é fácil ver que $B = 0$. Fazendo $x = L$, $y = 0$, resulta:

$$y=A\sin(px)-\frac{V}{P}x \quad \rightarrow \quad y=A\sin(pL)-\frac{V}{P}L=0$$

$$\therefore A\sin(pL)=\frac{V}{P}L \quad \textbf{(17)}$$

Obtendo a derivada de **(16)** com $B = 0$,

$$\frac{dy}{dx}=Ap\cos(px)-\frac{V}{P} \quad \textbf{(18)}$$

e, ao fazer $x = L$, $dy/dx = 0$,

$$Ap\cos(pL)=\frac{V}{P} \quad \textbf{(19)}$$

Dividindo membro a membro a equação **(17)** pela equação **(19)**, uma solução para **(16)** somente pode existir se

$$\frac{\cancel{A}\sin(pL)}{\cancel{A}p\cos(pL)}=\frac{\cancel{(V/P)}L}{\cancel{(V/P)}}$$

$$\therefore \tan\left(pL\right) = pL \quad \textbf{(20)}$$

Resolvendo a equação transcendental acima por tentativa e erro, o menor valor do produto *pL* que satisfaz **(20)** é

$$pL = 4.4934 \quad \textbf{(21)}$$

Inserindo em $p^2 = P/EI$ o valor de *p* obtido a partir de **(21)**, a carga crítica da coluna exibida na Figura 7 é

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{L^2} \quad \textbf{(22)}$$

O comprimento de flambagem da coluna é obtido se igualarmos o lado direito das equações **(9)** e **(22)**,

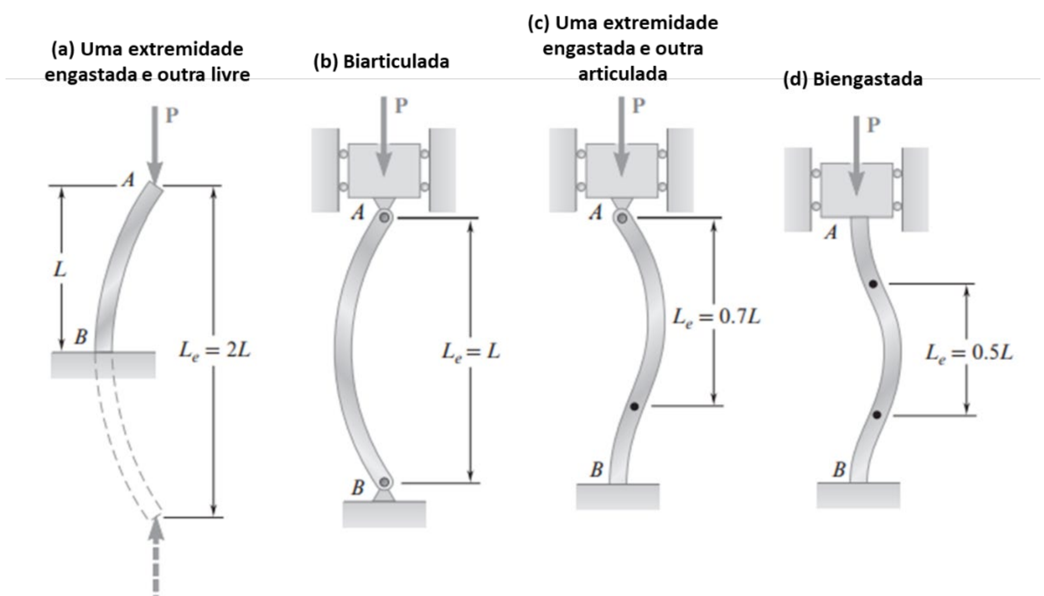
$$\frac{\pi^2 \cancel{EI}}{L_e^2} = \frac{20.19\cancel{EI}}{L^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{L_e^2} = \frac{20.19}{L^2}$$

$$\therefore L_e = \sqrt{\frac{\pi^2}{20.19}}L$$

$$\therefore L_e = 0.699L \approx 0.70L \quad \textbf{(23)}$$

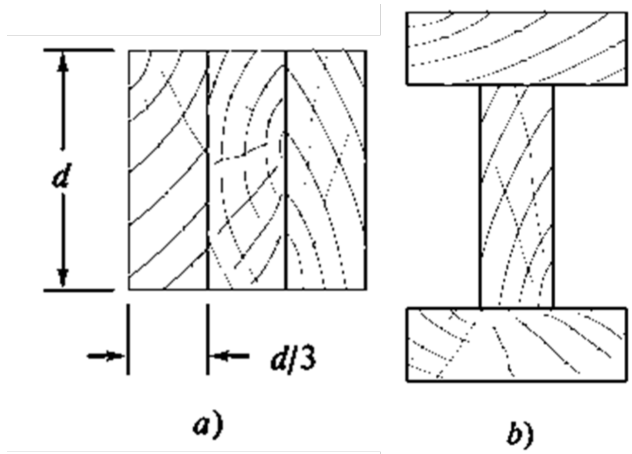
Portanto, o comprimento de flambagem de uma coluna com um extremo fixo e outro articulado é aproximadamente igual a 0.70*L*.
Na Figura 10 mostram-se os comprimentos de flambagem correspondentes às diferentes condições de extremidade.

Figura 10. *Comprimento de flambagem de coluna para várias condições de extremidade.*



1.3. Ejemplo resuelto

Uma columna de longitud efectiva *L* puede construirse al pegar tablas idénticas en cada uno de los arreglos que se muestran en la figura. Determine la relación de la carga crítica que se obtiene con el arreglo a sobre la carga crítica que se logra con el arreglo *b*.



Solución. Considerando el arreglo a, tenemos el momento di inercia $I_a = d^4/12$. La carga crítica es

$$P_{cr,a} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \times E \times \left(d^4/12\right)}{L^2} = \frac{\pi^2 Ed^4}{12L^2} \quad \textbf{(I)}$$

Después, definindo los ejes *x* y y como se muestra en la figura, verificamos que el momento de inercia mínimo para el arreglo b corresponde al eje y e puede ser determinado con el teorema del eje paralelo,

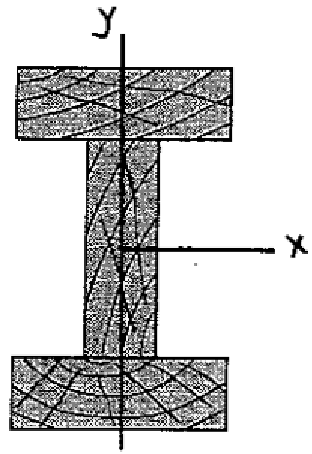
$$I_{\min} = I_y = \frac{1}{12} \times \left(\frac{d}{3}\right) \times d^3 + \frac{1}{12} \times d \times \left(\frac{d}{3}\right)^3 + \frac{1}{12} \times \left(\frac{d}{3}\right) \times d^3 = \frac{19d^4}{324}$$

La carga crítica correspondiente es

$$P_{cr,b} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{19\pi^2 Ed^4}{324L^2} \quad \textbf{(II)}$$

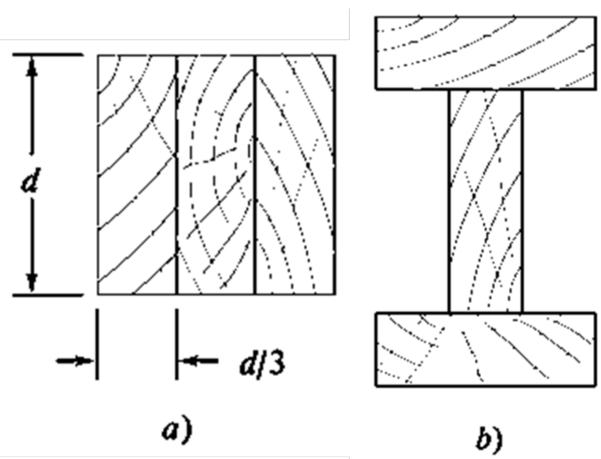
La relación de la carga crítica que se obtiene con el arreglo a (resultado **(I)**) sobre la carga crítica que se logra con el arreglo *b* (resultado **(II)**) es

$$\frac{P_{cr,a}}{P_{cr,b}} = \frac{\dfrac{\cancel{\pi^2 Ed^4}}{12\cancel{L^2}}}{\dfrac{19\cancel{\pi^2 Ed^4}}{324\cancel{L^2}}} = \frac{324}{228} = \boxed{1.421}$$



1.3. Exemplo resolvido

Uma coluna de comprimento de flambagem L pode ser construída com pranchas idênticas, como ilustram as seções mostradas a seguir. Determine a razão entre a carga crítica obtida com o arranjo **(a)** e a carga crítica obtida com o arranjo **(b)**.



Solução. Considerando o arranjo a, temos o momento de inércia I_a = $d^4/12$. Segue que a carga crítica é

$$P_{cr,a} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \times E \times \left(d^4/12\right)}{L^2} = \frac{\pi^2 E d^4}{12L^2} \quad \textbf{(I)}$$

Em seguida, definindo os eixos x e y como mostra a figura ao fim da solução, verificamos que o momento de inércia mínimo para o arranjo b corresponde ao eixo y e pode ser determinado com o teorema dos eixos paralelos,

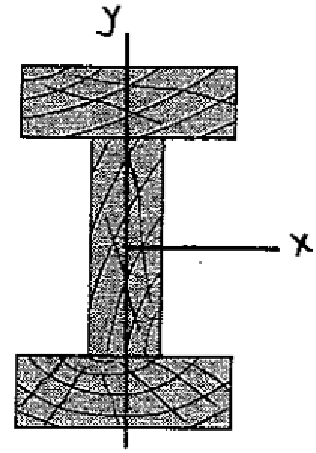
$$I_{\min} = I_y = \frac{1}{12} \times \left(\frac{d}{3}\right) \times d^3 + \frac{1}{12} \times d \times \left(\frac{d}{3}\right)^3 + \frac{1}{12} \times \left(\frac{d}{3}\right) \times d^3 = \frac{19d^4}{324}$$

A carga crítica correspondente é

$$P_{cr,b} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{19\pi^2 E d^4}{324L^2} \quad \textbf{(II)}$$

A razão entre a carga crítica obtida com o arranjo a (resultado **(I)**) e a carga crítica computada com o arranjo b (resultado **(II)**) é

$$\frac{P_{cr,a}}{P_{cr,b}}=\frac{\dfrac{\cancel{\pi^2 E d^4}}{12\cancel{L^2}}}{\dfrac{19\cancel{\pi^2 E d^4}}{324\cancel{L^2}}}=\frac{324}{228}=\boxed{1.421}$$



> ▲ **Termos importantes**
>
> ■ **Fórmula de Euler*** (*Idêntico em português): Equação que descreve a carga que deve ser aplicada a uma coluna esbelta e ereta para que esta se flambe.
>
> ■ **Esfuerzo crítico** ("Esforço crítico"): Tensão correspondente à carga crítica P_{cr}.
>
> ■ **Relación efectiva de esbeltez** ("Índice de esbeltez"): Razão entre o comprimento efetivo de flambagem L_e e o raio de giração r.