



## Tradução Técnica

### ■ Excerto 10: Quatro problemas de eletromagnetismo

#### ■ Excerpt 10: Four problems on electromagnetics

#### ◆ Lucas Monteiro Nogueira

Nº	Título	Idioma	Referência
1	<b>Exercice 1 – Carré de charges ponctuelles</b> (Exercício 1 – Quadrado de cargas pontuais)	Francês → Português	Amzallag et al. (2006)
2	<b>Übung 2 – Kreisförmige Flächenladung</b> (Exercício 2 – Carga superficial circular)	Alemão → Português	Filtz e Henke (2007)
3	<b>Exercise 3 – Two straight-line charges</b> (Exercício 3 – Duas cargas em linha reta)	Inglês → Português	Inan et al. (2016)
4	<b>Exercise 4 – Circular ring of charge</b> (Exercício 4 – Anel circular carregado)	Inglês → Português	Inan et al. (2016)

#### ◆ Referências

1. Amzallag, É, Cipriani, J., Bem Aïm, J. e Piccioli, N. (2006). *Électrostatique et Electrocinétique*. 2ª edição. EdiScience.
2. Filtz, M. e Henke, H. (2007). *Übungsbuch Elektromagnetische Felder*. Springer.
3. Inan, U.S., Inan, A. e Said, R. (2016). *Engineering Electromagnetics and Waves*. 2ª edição. Pearson.

#### ◆ Índice

1. Exercice 1 – Carré de charges ponctuelles
2. Übung 2 – Kreisförmige Flächenladung
3. Exercise 3 – Two straight-line charges
4. Exercise 4 – Circular ring of charge

◆ 1. Exercice 1 – Carré de charges ponctuelles

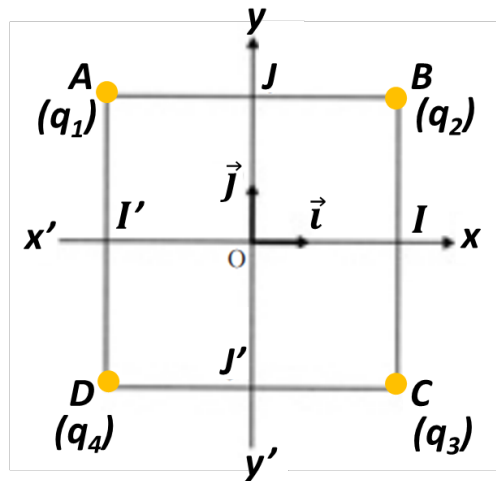
↳ Referencia 1 (Amzallag et al., 2006), pp. 42, 45 – 47. Com modificações.

On place quatre charges ponctuelles aux sommets  $ABCD$  d'un carré de côté  $a = 1$  m, et de centre  $O$ , origine d'un repère orthonormé  $Oxy$  de vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . On donne  $q_1 = q = 10^{-8}$  C,  $q_2 = -2q$ ,  $q_3 = 2q$ ,  $q_4 = -q$ .

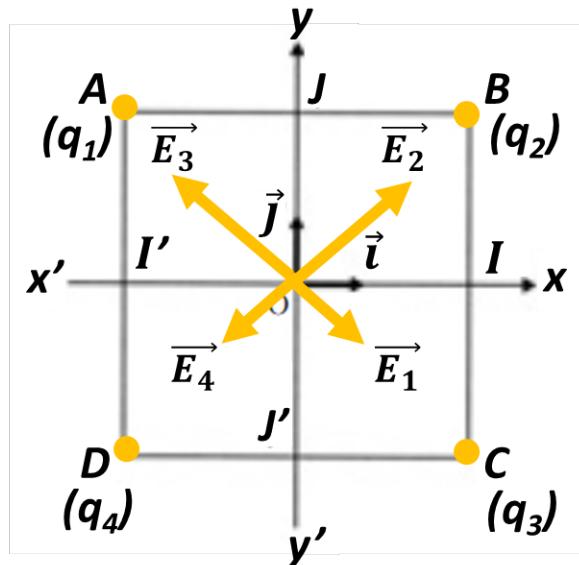
(a) Déterminer le champ électrique  $\mathbf{E}$  au centre  $O$  du carré.

(b) Exprimer le potentiel  $V$  créé en  $O$  par les quatres charges.

(c) Exprimer le potentiel sur les parties des axes  $x'x$  et  $y'y$  intérieures au carré. Quelle est, en particulier, la valeur de  $V$  aux points d'intersection de ces axes avec les côtés du carré ( $I, I', J$  et  $J'$ )?



*Solution. Partie (a):* Soit  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ , et  $\vec{E}_4$  les champs créés en  $O$  par les charges  $q_1, q_2, q_3$ , et  $q_4$ , respectivement.



On peut donc écrire:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 \quad (\mathbf{I})$$

Par raison de symétrie:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_4 = \begin{bmatrix} \frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{i} - \frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{j} \\ -\frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{i} - \frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{j} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -2 \times \frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{j}$$

$$\therefore \vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -2 \times \frac{2Kq}{a^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\therefore \vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -\frac{2\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j}$$

On a de même:

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 2E_2 \cos(45^\circ) \vec{j} = 2K \times \frac{4q}{a^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\therefore \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{4\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j}$$

On peut insérer ces derniers résultats en **(I)**,

$$\vec{E} = -\frac{2\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j} + \frac{4\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j}}$$

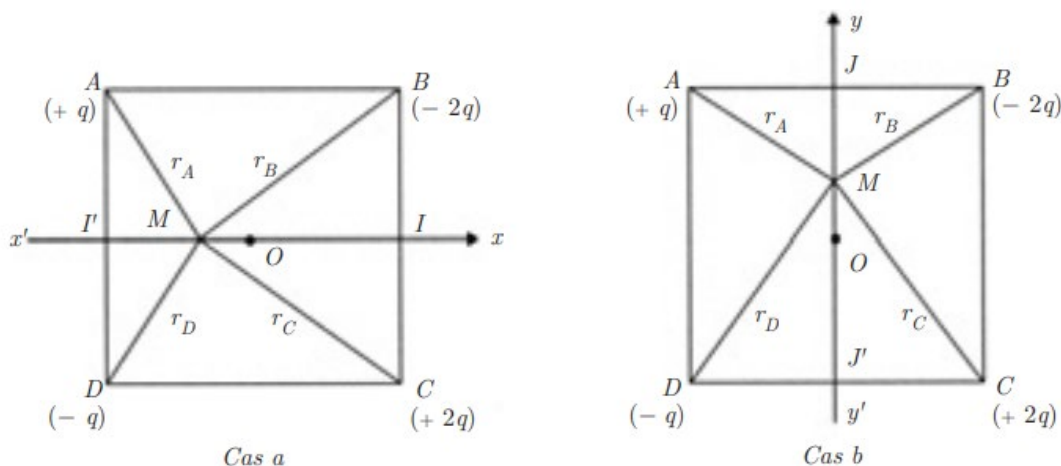
Le champ résultant est donc (1) dirigé suivant l'axe  $y'oy$ ; (2) dans le sens positif de l'axe  $y'oy$ ; et (3) de norme  $E = 2\sqrt{2}Kq/a^2$ . La valeur numérique peut être obtenue comme suit:

$$|\vec{E}| = \frac{2\sqrt{2}Kq}{a^2} = \frac{2\sqrt{2} \times (9 \times 10^9) \times 10^{-8}}{1^2} = \boxed{255 \text{ V/m}}$$

**Partie (b):** Soient  $V_1, V_2, V_3, V_4$  les potentiels créés par les charges  $q_1, q_2, q_3$  et  $q_4$ , respectivement, au centre  $O$  du carré. On a

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{Kq}{(\sqrt{2}a/2)} - \frac{2Kq}{(\sqrt{2}a/2)} + \frac{2Kq}{(\sqrt{2}a/2)} - \frac{Kq}{(\sqrt{2}a/2)} = \boxed{0}$$

**Partie (c):** Ici, il faut établir la variation du potentiel sur les axes  $x'Ox$  et  $y'Oy$ .



→ Cas a. Sur l'axe  $x'Ox$ , on a  $\overline{MA} = \overline{MD}$  et  $\overline{MB} = \overline{MC}$ . Le potentiel requis est:

$$V = Kq \left( \frac{1}{\overline{MA}} - \frac{2}{\overline{MB}} + \frac{2}{\overline{MC}} - \frac{1}{\overline{MD}} \right)$$

C'est-à-dire,

$$\boxed{V = 0}$$

Ce résultat suggère que l'axe  $x'Ox$  est une équipotentielle. On peut pareillement noter que, lorsque  $I$  et  $I'$  sont sur l'axe, il s'ensuit que  $V(I) = 0$  et  $V(I') = 0$ .

→ Cas b. Sur l'axe  $y'Oy$ , on a  $\overline{MA} = \overline{MB}$  et  $\overline{MC} = \overline{MD}$ . Le potentiel requis est:

$$V = Kq \left( \frac{1}{\overline{MC}} - \frac{1}{\overline{MA}} \right)$$

soit,

$$V = Kq \left\{ \left[ (y-a)^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{-1/2} - \left[ (y+a)^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{-1/2} \right\}$$

En deux points symétriques par rapport à  $O$ , sur l'axe  $y'Oy$ , les potentiels sont opposés:

$$V(y) = -V(-y)$$

Si  $M$  est en  $J$ , on a  $JA = a/2$  et  $JC = a\sqrt{5}/2$ , soit:

$$V(J) = Kq \left[ \frac{2}{\sqrt{5}a} - \frac{2}{a} \right] = \frac{2Kq}{a} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \right)$$

$$\therefore V(J) = \frac{2Kq}{a} \left( \frac{\sqrt{5}-5}{5} \right)$$

Si  $M$  est en  $J'$ , alors  $V(J') = -V(J)$ . On peut finalement insérer  $K = 9 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ ,  $q = 10^{-8} \text{ C}$  et  $a = 1 \text{ m}$ , de façon que:

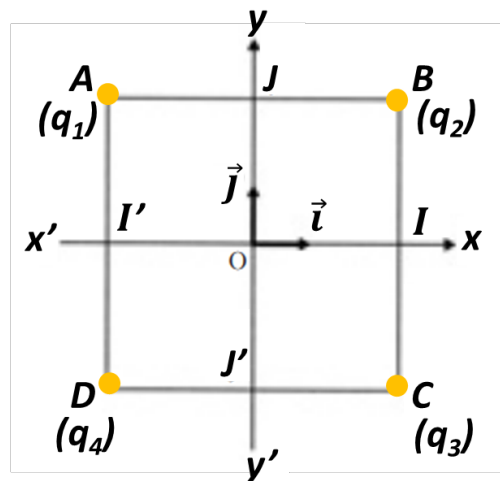
$$V(J) = \frac{2 \times (9.0 \times 10^9) \times 10^{-8}}{1.0} \times \left( \frac{\sqrt{5}-5}{5} \right) = \boxed{-99.5 \text{ V}}$$

De même,  $V(J') = 99.5 \text{ V}$ .

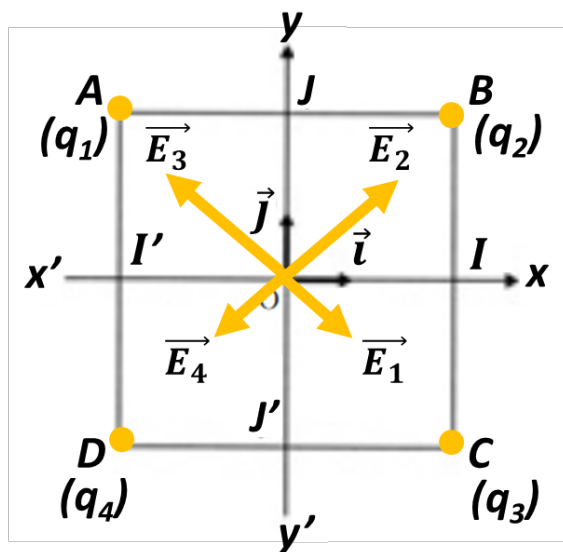
**1. Exercício 1 – Quadrado de cargas pontuais**

Posicionam-se quatro cargas pontuais nos vértices  $ABCD$  de um quadrado de lado  $a = 1 \text{ m}$  e centro  $O$  que coincide com a origem de um sistema ortonormal  $Oxy$  de vetores unitários  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . São dados  $q_1 = q = 10^{-8} \text{ C}$ ,  $q_2 = -2q$ ,  $q_3 = 2q$ ,  $q_4 = -q$ .

- (a) Determinar o campo elétrico  $\mathbf{E}$  no centro  $O$  do quadrado.
- (b) Exprimir o potencial  $V$  exercido em  $O$  sob o efeito das quatro cargas.
- (c) Exprimir o potencial exercido sobre as partes dos eixos  $x'x$  e  $y'y$  internas ao quadrado. Em particular, qual é o valor de  $V$  nos pontos de interseção desses eixos com os lados do quadrado ( $I, I', J$  e  $J'$ )?



*Solução. Parte (a):* Sejam  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$  e  $\vec{E}_4$  os campos gerados em  $O$  pelas cargas  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$ , respectivamente.



Podemos escrever:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 \quad (\mathbf{I})$$

Por simetria:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_4 = \begin{bmatrix} \frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{i} - \frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{j} \\ -\frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{i} - \frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{j} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -2 \times \frac{2Kq}{a^2} \cos(45^\circ) \vec{j}$$

$$\therefore \vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -2 \times \frac{2Kq}{a^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\therefore \vec{E}_1 + \vec{E}_4 = -\frac{2\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j}$$

Do mesmo modo:

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 2E_2 \cos(45^\circ) \vec{j} = 2K \times \frac{4q}{a^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\therefore \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{4\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j}$$

Podemos inserir tais resultados em **(I)**,

$$\vec{E} = -\frac{2\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j} + \frac{4\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}Kq}{a^2} \vec{j}}$$

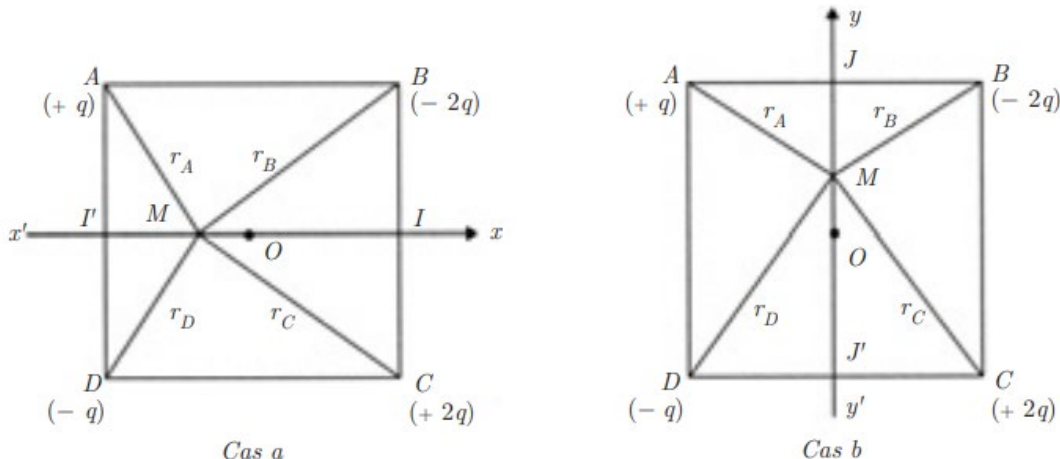
O campo resultante é, portanto, (1) dirigido ao eixo  $y'ou$ ; (2) no sentido positivo do eixo  $y'oy$ ; e (3) de módulo  $E = 2\sqrt{2}Kq/a^2$ . O valor numérico pode ser obtido como segue:

$$|\vec{E}| = \frac{2\sqrt{2}Kq}{a^2} = \frac{2\sqrt{2} \times (9 \times 10^9) \times 10^{-8}}{1^2} = \boxed{255 \text{ V/m}}$$

**Parte (b):** Sejam  $V_1, V_2, V_3$  e  $V_4$  os potenciais gerados pelas cargas  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$ , respectivamente, no centro  $O$  do quadrado. Temos

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{Kq}{(\sqrt{2}a/2)} - \frac{2Kq}{(\sqrt{2}a/2)} + \frac{2Kq}{(\sqrt{2}a/2)} - \frac{Kq}{(\sqrt{2}a/2)} = \boxed{0}$$

**Parte (c):** Aqui, busca-se obter a variação de potencial sobre os eixos  $x'Ox$  e  $y'Oy$ .



*Caso a.* Sobre o eixo  $x'Ox$ , temos  $\overline{MA} = \overline{MD}$  e  $\overline{MB} = \overline{MC}$ . O potencial solicitado é

$$V = Kq \left( \frac{1}{\overline{MA}} - \frac{2}{\overline{MB}} + \frac{2}{\overline{MC}} - \frac{1}{\overline{MD}} \right)$$

O que resulta em

$$\boxed{V = 0}$$

Esse resultado sugere que o eixo  $x'Ox$  é uma linha equipotencial. Podemos notar paralelamente que, uma vez que I e I' estão sobre esse eixo, segue que  $V(I) = 0$  e  $V(I') = 0$ .

*Caso b.* Sobre o eixo  $y'Oy$ , temos  $\overline{MA} = \overline{MB}$  e  $\overline{MC} = \overline{MD}$ . O potencial solicitado é:

$$V = Kq \left( \frac{1}{\overline{MC}} - \frac{1}{\overline{MA}} \right)$$

Isto é,

$$V = Kq \left\{ \left[ (y-a)^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{-1/2} - \left[ (y+a)^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{-1/2} \right\}$$

Nos dois pontos simétricos com relação a O e sobre o eixo  $y'Oy$ , os potenciais são opostos:

$$V(y) = -V(-y)$$

Se  $M$  está em  $J$ ,  $JA = a/2$  e  $JC = a\sqrt{5}/2$ , logo:

$$V(J) = Kq \left[ \frac{2}{\sqrt{5}a} - \frac{2}{a} \right] = \frac{2Kq}{a} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \right)$$

$$\therefore V(J) = \frac{2Kq}{a} \left( \frac{\sqrt{5} - 5}{5} \right)$$

Se  $M$  está em  $J'$ , então  $V(J') = -V(J)$ . Podemos finalmente inserir  $K = 9 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ ,  $q = 10^{-8} \text{ C}$  e  $a = 1 \text{ m}$ , de modo que:

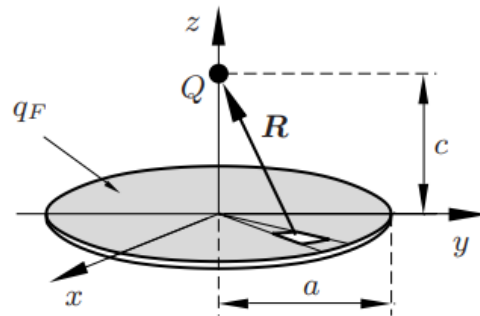
$$V(J) = \frac{2 \times (9.0 \times 10^9) \times 10^{-8}}{1.0} \times \left( \frac{\sqrt{5} - 5}{5} \right) = \boxed{-99.5 \text{ V}}$$

Analogamente,  $V(J') = 99.5 \text{ V}$ .

## ◆ 2. Übung 2 – Kreisförmige Flächenladung

↳ Referencia 1 (Flitz e Henke, 2007), pp. 9 – 10. Com modificações.

Im kartesischen Koordinatensystem sei die Fläche  $x^2 + y^2 \leq a^2$  der Ebene  $z = 0$  homogen mit der Gesamtladung  $Q$  belegt. Zu bestimmen ist die Kraft auf eine Punktladung  $Q$ , die im Abstand  $c$  von der Flächenladung auf der  $z$ -Achse angeordnet ist. Überprüfe das Ergebnis außerdem für den Fall  $c \gg a$ .



*Lösung.* Die vorliegende Anordnung ist rotationssymmetrisch, so dass die Rotationsachse ( $z$ -Achse) naturgemäß eine Feldlinie darstellt und daher nach Coulomb-Gesetz nur eine Kraft in  $z$ -Richtung auftreten wird,  $\mathbf{F} = \mathbf{e}_z F = \mathbf{e}_z Q E_z$ . Der elementare Kraftbeitrag am Ort der Punktladung infolge der differentiellen Ladung  $dq = q_F dF'$  beträgt zunächst nach

$$dK_z = Q \frac{q_F dF' \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad ; \quad q_F = \frac{Q}{\pi a^2}$$

mit  $dF' = \rho' d\rho' d\phi'$  und  $\mathbf{R} = \mathbf{e}_z c - \mathbf{e}_{\rho'} \rho'$ , so dass man für die resultierende Kraft den Ausdruck

$$K_z = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{\rho'=0}^a \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{c}{(c^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi'$$



$$\begin{aligned} \therefore K_z &= \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^a \frac{c}{(c^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' \\ \therefore K_z &= \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a^2} \times \left( \frac{c}{\sqrt{c^2 + \rho'^2}} \right) \Bigg|_{\rho'=0}^{\rho'=a} \\ \therefore K_z &= \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/c^2}} \right) \end{aligned}$$

erhält, welcher wie zu erwarten stets positive Werte liefert.

Für große Entfernungen  $c \gg a$  muss die Kraft dem Wert zustreben, der sich ergibt, wenn man die Flächenladung als Punktladung im Ursprung konzentriert annimmt. Entwickelt man also den reziproken Wurzelausdruck in eine Taylor-Reihe und bricht nach dem linearen Glied ab

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2/c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2} \text{ für } \frac{a}{c} \ll 1$$

so erhält man schließlich  $K_z \approx \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}$  für  $c \gg a$ .

## 2. Exercício 2 – Carga superficial circular

No sistema de coordenadas cartesianas, a área  $x^2 + y^2 \leq a^2$  do plano  $z = 0$  é ocupada por uma carga  $Q$ . Busca-se a força elétrica exercida em uma carga pontual  $Q$ , localizada ao longo do eixo  $z$  e a uma distância  $c$  da carga superfície. Verificamos também o resultado para o caso  $c \gg a$ .

*Solução.* O presente arranjo é rotacionalmente simétrico, de modo que o eixo de rotação (eixo  $z$ ) naturalmente representa uma linha de campo e, pela lei de Coulomb, a força resultante estará orientada ao longo de  $z$ ; tal força é denotada como  $\mathbf{F} = \mathbf{e}_z F_z = \mathbf{e}_z Q E_z$ . A força elétrica exercida sobre  $Q$  por um elemento de carga  $dq = q_F dF'$  é dada por

$$dK_z = Q \frac{q_F dF'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{R}}{R^3} \quad ; \quad q_F = \frac{Q}{\pi a^2}$$

com  $dF' = \rho' d\rho' d\phi'$  e  $\mathbf{R} = \mathbf{e}_z c - \mathbf{e}_{\rho'} \rho'$ , a força resultante  $K_z$  pode ser determinada com a expressão

$$K_z = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/c^2}} \right)$$

Como esperado, a expressão acima sempre resulta em valores positivos. Para grandes distâncias  $c \gg a$ , a força deve tender para o valor que resultaria se a superfície carregada fosse substituída por uma carga pontual localizada na origem. Então, expandindo  $\frac{1}{\sqrt{1 + a^2/c^2}}$  em uma série de Taylor truncada ao fim do termo linear,

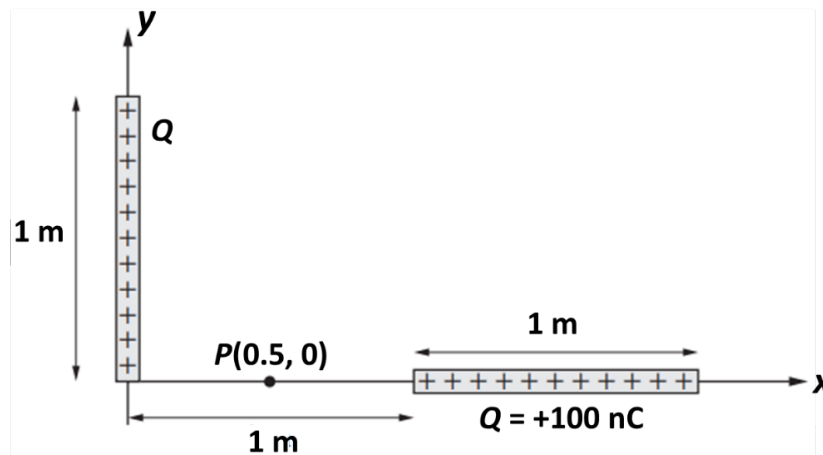
$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2/c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2} \text{ para } \frac{a}{c} \ll 1$$

obtém-se, finalmente,  $K_z \approx \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}$ , para  $c \gg a$ .

### ◆ 3. Exercise 3 – Two straight-line charges

↳ Referencia 3 (Inan et al., 2016), pp. 360. Com modificações.

Consider two uniformly charged wires, each of length 1 m and a total charge of +100 nC, with their ends separated by 1 m, as shown below. **(a)** Find the electric potential  $\Phi$  at the point  $P$ , midway between the two wires. **(b)** Find the electric field  $\mathbf{E}$  at point  $P$ .



**Solution. Part (a):** The linear charge density for either of the two wires is  $\rho_l = (100 \text{ nC})/(1 \text{ m}) = 100 \text{ nC/m} = 10^{-7} \text{ C/m}$ . To find the electric potential at point  $P$  associated with the two charges, we write

$$\Phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \underbrace{\int_0^1 \frac{\rho_l dy}{\sqrt{(0.5)^2 + y^2}}}_{\text{Vertical line}} + \underbrace{\int_1^2 \frac{\rho_l dx}{(x-0.5)}}_{\text{Horizontal line}} \right]$$

$$\therefore \Phi_P = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \ln \left( y + \sqrt{0.25 + y^2} \right) \right]_{y=0}^1 + \left[ \ln(x - 0.5) \right]_{x=1}^2 \right\}$$

$$\therefore \Phi_P = (9.0 \times 10^9) \times 10^{-7} \times \left[ \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1.25}}{0.5} \right) + \ln \left( \frac{1.5}{0.5} \right) \right] = 2288 \text{ V} \approx \boxed{2290 \text{ V}}$$

**Part (b):** To find the electric field vector at point  $P$ , we write

$$\mathbf{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_0^1 \frac{(0.5\vec{i} - y\vec{j})\rho_\ell dy}{[(0.5)^2 + y^2]^{3/2}} + \int_1^2 \frac{(0.5 - x)\rho_\ell \vec{i} dx}{(x - 0.5)^3} \right\}$$

$$\therefore \mathbf{E}_P = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{i} \int_0^1 \frac{0.5 dy}{(y^2 + 0.25)^{3/2}} - \vec{j} \int_0^1 \frac{y dy}{(y^2 + 0.25)^{3/2}} - \vec{i} \int_1^2 \frac{dx}{(x - 0.5)^2} \right]$$

$$\therefore \mathbf{E}_P = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{i} \frac{0.5y}{0.25\sqrt{0.25 + y^2}} \Big|_0^1 + \vec{j} \frac{1}{\sqrt{0.25 + y^2}} \Big|_0^1 + \vec{i} \frac{1}{y - 0.5} \Big|_1^2 \right]$$

$$\therefore \mathbf{E}_P = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{i} \frac{0.5 \times 1.0}{0.25\sqrt{0.25 + 1^2}} + \vec{j} \frac{1}{\sqrt{0.25 + 1^2}} - \vec{j} \frac{1}{\sqrt{0.25 + 0^2}} + \vec{i} \frac{1}{1.5} - \vec{i} \frac{1}{0.5} \right]$$

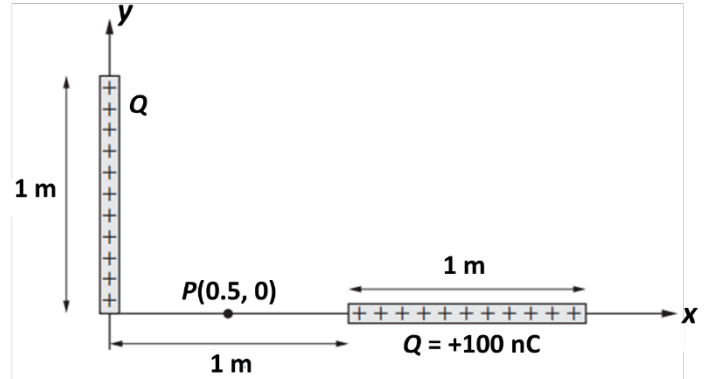
$$\therefore \mathbf{E}_P = \underbrace{\frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0}}_{\approx 9 \times 10^2} \left[ \vec{i} \left( \frac{0.5}{0.25\sqrt{0.25 + 1^2}} + \frac{1}{1.5} - \frac{1}{0.5} \right) + \vec{j} \left( \frac{1}{\sqrt{0.25 + 1^2}} - \frac{1}{\sqrt{0.25}} \right) \right]$$

$$\therefore \mathbf{E}_P = 9 \times 10^2 \left[ 0.456\vec{i} + 1.11\vec{j} \right]$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{E}_P = (410\vec{i} - 995\vec{j}) \text{ V/m}}$$

### 3. Exercício 3 – Duas cargas em linha reta

Considere dois fios uniformemente carregados, cada um de comprimento 1 m e carga total +100 nC, com suas extremidades separadas em 1 m, como mostra a ilustração a seguir. **(a)** Encontre o potencial elétrico  $\Phi$  no ponto  $P$ , posicionado a meio caminho entre os dois fios. **(b)** Encontre o campo elétrico  $\mathbf{E}$  no ponto  $P$ .



**Solução. Parte (a):** A densidade linear de carga para qualquer um dos dois fios é  $\rho_l = (100 \text{ nC})/(1 \text{ m}) = 100 \text{ nC/m} = 10^{-7} \text{ C/m}$ . Para encontrar o potencial em  $P$  referente às duas cargas, escrevemos

$$\Phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^1 \frac{\rho_l dy}{\sqrt{(0.5)^2 + y^2}} + \int_1^2 \frac{\rho_l dx}{(x-0.5)} \right]$$

Fio vertical                      Fio horizontal

$$\therefore \Phi_P = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \ln \left( y + \sqrt{0.25 + y^2} \right) \right]_{y=0}^1 + \left[ \ln(x-0.5) \right]_{x=1}^2 \right\}$$

$$\therefore \Phi_P = (9.0 \times 10^9) \times 10^{-7} \times \left[ \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1.25}}{0.5} \right) + \ln \left( \frac{1.5}{0.5} \right) \right] = 2288 \text{ V} \approx \boxed{2290 \text{ V}}$$

**Parte (b):** Para encontrar o vetor campo elétrico no ponto  $P$ , escrevemos

$$\mathbf{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_0^1 \frac{(0.5\vec{i} - y\vec{j})\rho_l dy}{\left[ (0.5)^2 + y^2 \right]^{3/2}} + \int_1^2 \frac{(0.5-x)\rho_l \vec{i} dx}{(x-0.5)^3} \right\}$$

$$\therefore \mathbf{E}_P = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{i} \int_0^1 \frac{0.5 dy}{(y^2 + 0.25)^{3/2}} - \vec{j} \int_0^1 \frac{y dy}{(y^2 + 0.25)^{3/2}} - \vec{i} \int_1^2 \frac{dx}{(x-0.5)^2} \right]$$

$$\therefore \mathbf{E}_P = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{i} \frac{0.5y}{0.25\sqrt{0.25 + y^2}} \Big|_0^1 + \vec{j} \frac{1}{\sqrt{0.25 + y^2}} \Big|_0^1 + \vec{i} \frac{1}{y-0.5} \Big|_1^2 \right]$$

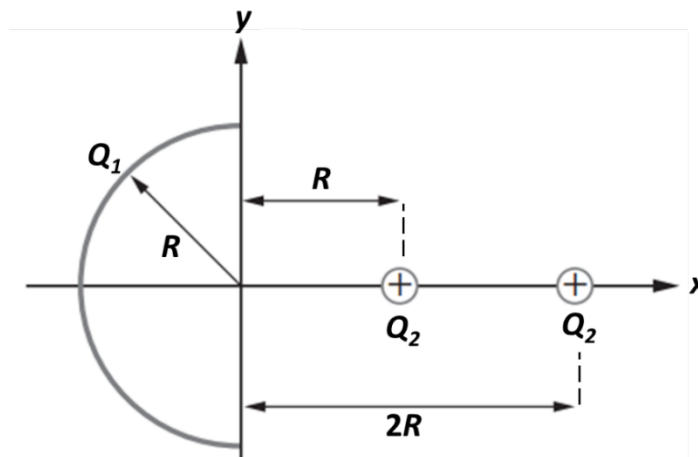
$$\therefore \mathbf{E}_P = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{i} \frac{0.5 \times 1.0}{0.25\sqrt{0.25 + 1^2}} + \vec{j} \frac{1}{\sqrt{0.25 + 1^2}} - \vec{j} \frac{1}{\sqrt{0.25 + 0^2}} + \vec{i} \frac{1}{1.5} - \vec{i} \frac{1}{0.5} \right]$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{E}_P &= \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left[ \underbrace{\vec{i}}_{\approx 9 \times 10^2} \left( \frac{0.5}{0.25\sqrt{0.25+1^2}} + \frac{1}{1.5} - \frac{1}{0.5} \right) + \vec{j} \left( \frac{1}{\sqrt{0.25+1^2}} - \frac{1}{\sqrt{0.25}} \right) \right] \\ \therefore \mathbf{E}_P &= 9 \times 10^2 \left[ 0.456\vec{i} + 1.11\vec{j} \right] \\ \therefore \mathbf{E}_P &= (410\vec{i} - 995\vec{j}) \text{ V/m} \end{aligned}$$

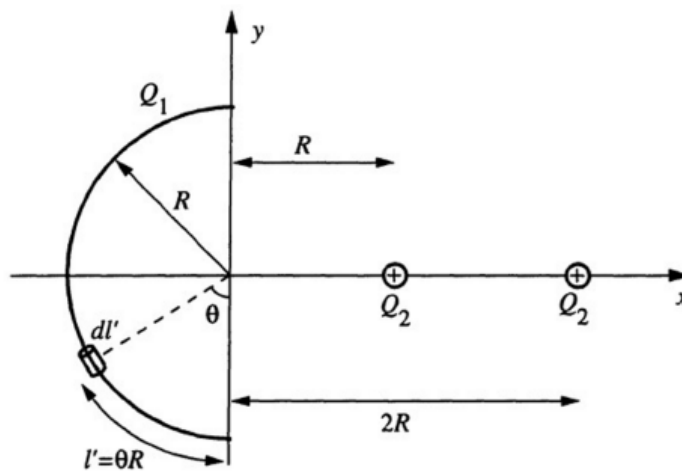
◆ 4. Exercise 4 – Circular ring of charge

↳ Referencia 3 (Inan et al., 2016), pp. 360. Com modificações.

A total charge of  $Q_1$  is distributed uniformly along a half-circular ring as shown in the following figure. Two point charges, each of magnitude  $Q_2$ , are situated as shown. The surrounding medium is free space. **(a)** Find  $Q_2$  in terms of  $Q_1$  so that the potential  $\Phi$  at the center of the ring is zero. **(b)** Find  $Q_2$  in terms of  $Q_1$  so that the electric field  $\mathbf{E}$  at the center of the ring is zero.



Solution. **Part (a):** The system is illustrated below.



The electric potential at the center of the ring (which coincides with the origin of the coordinate system we're using) consists of contributions from the ring itself, which has a total charge  $Q_1$ , and two point charges equal to  $Q_2$  each. Denoting the electric potential as  $\Phi$ , we may write

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{\text{half-ring}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (2R)} \\ \therefore \Phi &= \int_0^\pi \frac{\rho_\ell R d\phi'}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right) \\ \therefore \Phi &= \int_0^\pi \frac{\rho_\ell \cancel{R} d\phi'}{4\pi\epsilon_0 \cancel{R}} + \frac{3Q_2}{8\pi\epsilon_0 R} \\ \therefore \Phi &= \frac{\rho_\ell \pi}{4\pi\epsilon_0} + \frac{3Q_2}{8\pi\epsilon_0 R} \\ \therefore \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \rho_\ell \pi + \frac{3Q_2}{2R} \right)\end{aligned}$$

But  $\rho_\ell = Q_1/(\pi R)$ , or  $\rho_\ell \pi = Q_1/R$ , hence

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \rho_\ell \pi + \frac{3Q_2}{2R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R} + \frac{3Q_2}{2R} \right) \\ \therefore \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left( Q_1 + \frac{3Q_2}{2} \right)\end{aligned}$$

In order to obtain a potential  $\Phi = 0$ , the term in parentheses must equal zero; thus,

$$Q_1 + \frac{3Q_2}{2} = 0 \rightarrow \boxed{Q_2 = -\frac{2Q_1}{3}}$$

**Part (b):** Noting that, due to symmetry, the half-ring electric field at the origin has zero  $y$  and  $z$  components, we can simply work with the  $x$  component of the field. Based on the illustration shown at the outset of part (a), the  $x$  component of the elemental electric field at the origin due to a charge element  $\rho_\ell dl'$  along the half-ring is given by

$$[dE_x]_{\text{element}} = \frac{\rho_\ell dl'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin(\theta) = \frac{\rho_\ell dl'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\left(\frac{l'}{R}\right)$$

This can be integrated to find the total field at the origin due to the half-ring,

$$[E_x]_{\text{half-ring}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^{\pi R} \underbrace{\sin\left(\frac{l'}{R}\right)}_{=2R} dl' = \frac{2\rho_l R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{2Q_1/\pi}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Then, the total electric field at the origin due to both the half-ring and the two point charges follows as

$$\mathbf{E}(0,0) = \frac{2Q_1/\pi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \bar{\mathbf{i}} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \bar{\mathbf{i}} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} \bar{\mathbf{i}}$$

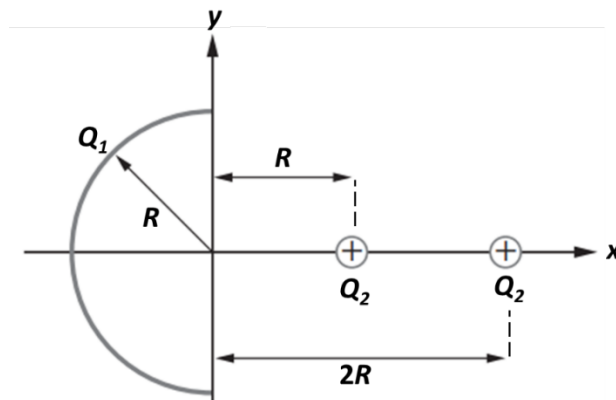
$$\therefore \mathbf{E}(0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left( \frac{2Q_1}{\pi} - \frac{5Q_2}{4} \right) \bar{\mathbf{i}}$$

Setting  $\mathbf{E} = 0$  and solving the term in parentheses for  $Q_2$ , we obtain

$$\frac{2Q_1}{\pi} - \frac{5Q_2}{4} = 0 \rightarrow \boxed{Q_2 = \frac{8Q_1}{5\pi}}$$

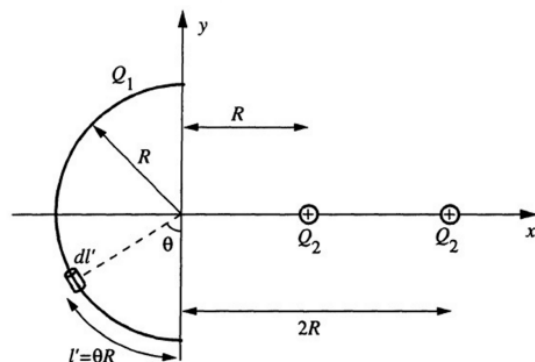
#### 4. Exercício 4 – Anel circular carregado

Uma carga total  $Q_1$  está distribuída uniformemente ao longo de um anel semicircular, como mostra a figura a seguir. O meio circundante é o espaço livre. **(a)** Encontre o valor de  $Q_2$  em termos de  $Q_1$  a fim que o potencial  $\Phi$  no centro do anel seja nulo. **(b)** Encontre  $Q_2$  em termos de  $Q_1$  a fim que o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$  no centro do anel seja nulo.



*Solução. Parte (a):* O sistema está ilustrado ao lado.

O potencial elétrico no centro do anel (que coincide com a origem do sistema de coordenadas usado) consiste de contribuições do próprio anel, cuja carga total é  $Q_1$ , e duas cargas pontuais iguais a  $Q_2$  cada. Denotando o potencial elétrico como  $\Phi$ , podemos escrever



$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{\text{meio-anel}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (2R)} \\ \therefore \Phi &= \int_0^\pi \frac{\rho_\ell R d\phi'}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right) \\ \therefore \Phi &= \int_0^\pi \frac{\rho_\ell \cancel{R} d\phi'}{4\pi\epsilon_0 \cancel{R}} + \frac{3Q_2}{8\pi\epsilon_0 R} \\ \therefore \Phi &= \frac{\rho_\ell \pi}{4\pi\epsilon_0} + \frac{3Q_2}{8\pi\epsilon_0 R} \\ \therefore \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \rho_\ell \pi + \frac{3Q_2}{2R} \right)\end{aligned}$$

Mas  $\rho_\ell = Q_1/(\pi R)$ , ou  $\rho_\ell \pi = Q_1/R$ , portanto

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \rho_\ell \pi + \frac{3Q_2}{2R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R} + \frac{3Q_2}{2R} \right) \\ \therefore \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left( Q_1 + \frac{3Q_2}{2} \right)\end{aligned}$$

A fim que o potencial  $\Phi = 0$ , o termo em parênteses deve ser nulo; logo,

$$Q_1 + \frac{3Q_2}{2} = 0 \rightarrow \boxed{Q_2 = -\frac{2Q_1}{3}}$$

**Parte (b):** Notando que, por simetria, o campo elétrico provocado anel circular na origem possui componentes y e z nulos, podemos trabalhar tão-somente com a componente x desse campo. Com base na ilustração fornecida no início da parte (a), a componente x do campo elétrico incremental na origem causado por um elemento de carga  $\rho_\ell dl'$  ao longo do meio-anel é

$$[dE_x]_{\text{elemento}} = \frac{\rho_\ell dl'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin(\theta) = \frac{\rho_\ell dl'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\left(\frac{l'}{R}\right)$$

Esse resultado pode ser integrado para fornecer o campo total na origem devido ao meio-anel,

$$[E_x]_{\text{meio-anel}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 R^2} \underbrace{\int_0^{\pi R} \sin\left(\frac{l'}{R}\right) dl'}_{=2R} = \frac{2\rho_l R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{2Q_1/\pi}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$



Então, o campo elétrico total na origem, levando em conta tanto o meio-anel quanto as duas cargas pontuais, é

$$\mathbf{E}(0,0) = \frac{2Q_1/\pi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{\mathbf{i}} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{\mathbf{i}} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} \vec{\mathbf{i}}$$
$$\therefore \mathbf{E}(0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left( \frac{2Q_1}{\pi} - \frac{5Q_2}{4} \right)$$

Fazendo  $\mathbf{E} = 0$  e resolvendo a expressão em parênteses para  $Q_2$ , obtemos

$$\frac{2Q_1}{\pi} - \frac{5Q_2}{4} = 0 \rightarrow \boxed{Q_2 = \frac{8Q_1}{5\pi}}$$



A **Lotka** oferece uma variedade de serviços de tradução, revisão e composição.

[www.lotkatranslation.com](http://www.lotkatranslation.com)



#### **Tradução técnica**

Traduzimos artigos, manuscritos e outros gêneros textuais em 8 idiomas.



#### **Revisão técnica**

Melhoramos a qualidade gramatical e estilística do seu documento.



#### **Jargão e terminologia**

Dominamos as terminologias e jargões de diversas áreas de engenharia e ciências naturais.



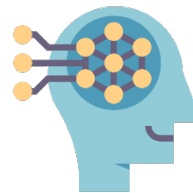
#### **Edição de referências bibliográficas**

Preparamos listas de referências em 4 padrões diferentes (ABNT, Harvard, APA, MLA).



#### **Edição de expressões matemáticas**

Preparamos as equações, reações químicas, tabelas e outros elementos especiais do seu documento.



#### **Revisão de documentos gerados por inteligência artificial**

Tecnologias de inteligência artificial generativa são ainda incipientes e propensas a erro. A Lotka pode melhorar a qualidade técnica de textos gerados ou traduzidos por IA.