



Tradução Técnica

■ **Excerto 1: Tensões de flexão e cisalhamento em vigas**

■ **Excerpt 1: Bending and shear stresses in beams**

◆ **Lucas Monteiro Nogueira**

Nº	Título	Idioma	Referência
1	Ren böjning av balkar (Flexão pura de vigas)	Sueco → Português	Stähle (2015)
2	Schubspannungen beim Balken und bei balkenartigen Strukturen (Esforços de cisalhamento em vigas e estruturas semelhantes)	Alemão → Português	Richard e Sander (2006)

◆ **Referências**

1. Stähle, P. (2015). *Introduktion till hållfasthetsläran* [Notas]. Lund University.
2. Richard, H.A. e Sander, M. (2006). *Technische Mechanik – Festigkeitslehre*. Vieweg.

◆ **Índice**

1. Ren böjning av balkar

2. Schubspannungen beim Balken und bei balkenartigen Strukturen

2.1. Balken mit Vollquerschnitt

2.1.1. Rechteckquerschnitt

2.1.2. Kreisquerschnitt

2.2. Balken mit dünnwandigen Profilen

2.2.1. Kreisringquerschnitt

2.2.2. I-Profil

2.2.3. U-Profil

2.3. Beispielproblem

◆ 1. Ren böjning av balkar

↳ Referência 1 (Per, 2015), pp. 56 – 61. Com modificações.

En balk deformeras och spänningar utvecklas inuti den när en tvärgående belastning appliceras. I en horisontell balk fritt upplagd vid ändarna och belastad nedåt i mitten, blir materialet på översidan av balken komprimerat medan materialet på undersidan sträcks. Det uppstår två typer av inre spänningar som orsakas av tvärgående belastningar. Dessa är skjuvspänningar parallellt med den tvärgående belastningen plus skjuvspänningar på plan vinkelräta mot lastriktningen samt tryckspänningar i den övre delen av balken och dragspänningar i den undre delen av balken. De sista två belastningarna bildar ett motriktat par som är lika i storlek och motsatta i riktning. Paret utgör ett böjmoment som förhindrar ökad deformation vilket kännetecknar en balk som utsätts för böjning. Spänningsfördelningen i en balk kan förutsägas ganska exakt även när vissa förenklande antaganden används.

Enkel balkböjning analyseras vanligtvis med Euler-Bernoullis balkekvation. Villkoren för att teorin skall kunna användas är att (1) balken är föremål för **ren böjning**, vilket innebär att skjuvkraften är noll och att inga torsions- eller axiella belastningar förekommer, (2) materialet är isotropt, homogent, linjärt elastiskt och följer Hookes lag, (3) balken är initialt rak med ett tvärsnitt som är konstant över hela balkens längd samt, (4) för att undvika så kallad sned böjning, antas balktvärsnittet vara symmetriskt med ett symmetriplan som sammanfaller med planet för böjningen.

I Euler-Bernoullis teori för slanka balkar är antagandet att "plana sektioner förblir plana" avgörande för analysen. Man tar således inte hänsyn till eventuell deformation på grund av skjuvning av tvärsnittet.

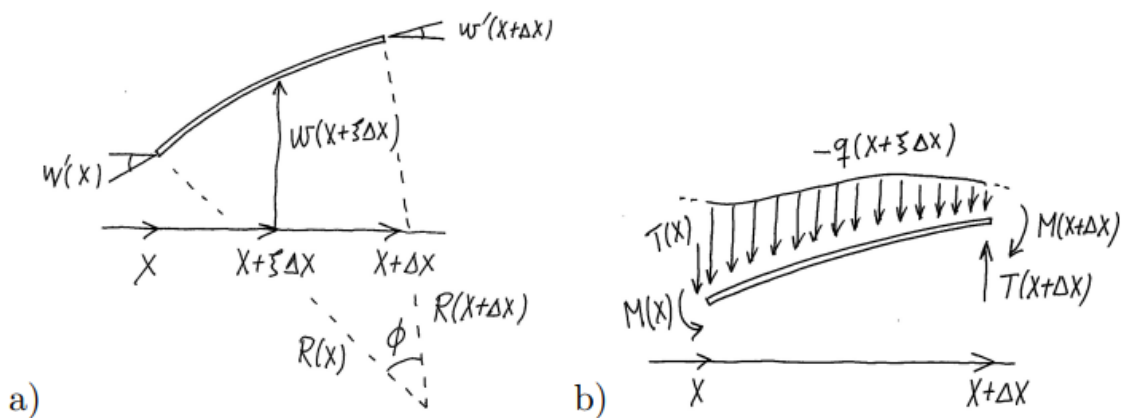
In Figur 1 visas en del av en deformerad balk med längden Δx . Ur figuren erhålls ett samband mellan förskjutning w i z -led och balkens krökningsradie R i deformerat tillstånd. Om balkens position är nästan horisontell, dvs. $w'(x) \ll 1$, erhålls

$$w'(x) - w'(x + \Delta x) = \phi = \frac{\Delta x}{R(x + \xi \Delta x)} \quad (1)$$

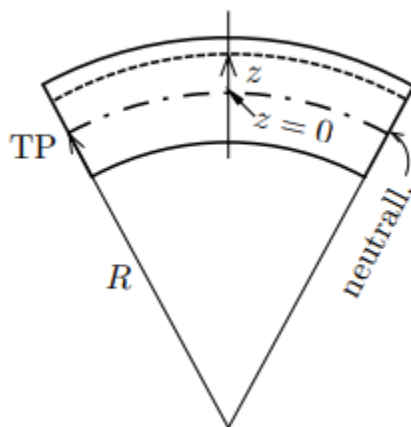
där ξ antar ett värde $0 \leq \xi \leq 1$. Värdet på ξ är inte känt men det kommer inte heller att behövas som vi ser i det följande. Krökningsradien i en punkt längs balken ges som ett gränsvärde enligt

$$\frac{1}{R(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w'(x) - w'(x + \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (2)$$

Figur 1. Krökt balk med utbredd last $q(x)$ och snittstorheterna moment $M(x)$ och tvärkraft $T(x)$. $q(x)$ och förskutningen $w(x)$ definieras som positiva i z -axelns riktning, dvs. uppåt i figuren. För ξ gäller att $0 \leq \xi \leq 1$.



Figur 2. Neutrallagret, som bildas av tvärsnittens tyngdpunkter har krökningsradien R . z -koordinaten är vinkelrät mot neutrallagret där $z = 0$.



Det är lätt att inse att balken i Fig.1 är sträckt på ovansidan och komprimerad på undersidan. Figur 2 visar en kort balksektion som i odeformerat tillstånd har längden ℓ_x . Sektionen är så kort att krökningsradien kan betraktas som konstant i hela segmentet. I krökningsplanet är z -axeln. För något z återfinns ett plan som varken är sträckt eller komprimerat, dvs. där töjningarna $\varepsilon_x = 0$. Detta plan kallas neutrallager och ibland även neutralplan eller neutralfiber. Utan att förlora i generalitet kan vi välja $z = 0$ i neutrallagret. Plan längs balken som befinner sig på samma avstånd från krökningscentrum kallas fibrer. Krökningsradien hos neutrallagret betecknas med $R = R(x)$. Längden av neutralplanet vid $z = 0$ är $R\phi = \ell_x$, vilket är detsamma som längden på den odeformerade balksektionen, pga. att neutralplanet saknar töjning. Av det följer att längden L_x av ett deformerat lager ges av

$$L_x = (R + z)\phi \quad (3)$$

Före deformationen har samma skikts längd varit

$$\ell_x = R\phi \quad (4)$$

Töjningen längs balken är

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{L_x - \ell_x}{\ell_x} = \frac{z}{R(x)} \quad (5)$$

Hookes lag ger spänningsfördelningen i balken som

$$\sigma_x(x, z) = E\varepsilon_x = E \frac{z}{R(x)} \quad (6)$$

Figur 1b visar en balkdel som belastas av en yttre utbredd kraft per längdenhet $q = q(x)$. Tvärkrafter T och momentet M är snittstorheter. Med z -axeln riktad uppåt och y -axeln in i böjplanet, i en yta med den utåtriktade normalen i positiv x -led, är T riktad i positiv z -led och M vrider runt den positiva y -axeln. I en yta med utåtriktad normal i negativ x -led är T riktad i negativ z -led och M vrider runt den negativa y -axeln. För balkens båda ändar gäller att T belastar balken så att den tippas moturs och M belastar balken så att den välvs uppåt, dvs. i z -led. Momentjämvikt är uppfylld om

$$M(x + \Delta x) - T(x + \Delta x)\Delta x - M(x) + q(x + \xi\Delta x)\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (7)$$

där momenten tagits runt balkänden vid x . Gränsvärdet när $\Delta x \rightarrow 0$ ger

$$T(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} = \frac{dM(x)}{dx} \quad (8)$$

Vidare innebär kraftjämvikt att

$$T(x + \Delta x) + q(x + \xi\Delta x)\Delta x - T(x) = 0 \quad (9)$$

vilket för $\Delta x \rightarrow 0$ ger

$$q(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-T(x + \Delta x) + T(x)}{\Delta x} = -\frac{dT(x)}{dx} \quad (10)$$

De dragspänningar i den övre delen av balken och tryckspänningar i den undre delen av balken som krökts med positiv krökningsradie, så som Fig. 1 visar, bildar ett motriktat kraftpar som är lika i storlek och motsatta i riktning enligt **(6)**. Spänningsfördelningen ger ett böjande moment som beräknas genom integration över tvärsnittsytan A , enligt följande

$$M = \int \sigma_x z dA = \int E \frac{z}{R} z dA = EI \times \frac{1}{R} \quad (11)$$

Kombinationen EI är **balkstyvheten** och I är balkstyvhetens tvärsnittsfaktor. Man ser att balkstyvhetens tvärsnittsfaktor

$$I = \int z^2 dA \quad (12)$$

som också känns igen som tvärsnittets yttröghetsmoment runt y -axeln, dvs. $I = I_y$. För flera geometrier, som rektangulärt, triangulärt, cirkulärt etc. tvärsnitt hittar man I enklast i en formelsamling, som TE-FYMA eller liknande. Resultaten **(1)**, **(11)**, **(8)** och **(10)** sammanfattas med

$$-q(x) = \frac{dT(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] \quad (13)$$

Ekvationen **(13)** kallas **elastika linjens ekvation**. Den löses med tillhörande randvillkor, vilka till antalet är lika med ekvationens ordning. Eftersom ekvationen löses i ett slutet intervall fördelar sig randvillkoren på balkens båda ändar. Vidare ges randvillkoren i par som så kallade naturliga randvillkor vilka är $M, T; M, w; T, w'$ och w', w . Kombinationerna M, w' och T, w ingår inte. De kan naturligtvis användas för en analys men inte det låter sig knappast realiseras rent praktiskt. Paret M och T är dynamiska randvillkor och w och w' är kinematiska randvillkor.

Spänningen i tvärsnittet är proportionell mot det pålagda böjmomentet. Från **(6)** och **(11)** erhålls

$$\sigma_z = \frac{zM}{I} \quad (14)$$

Vanligtvis skrivs

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \quad (15)$$

där W kallas **böjmotståndet**. Det kan beräknas som

$$W = \frac{I}{z_{\max}} \quad (16)$$

och hämtas från en lämplig formelsamling.

1. Flexão pura de vigas

Uma viga se deforma e esforços se desenvolvem quando um carregamento transversal é aplicado. Em uma viga horizontal simplesmente apoiada com o ponto médio sob o efeito de uma carga vertical para baixo, o material na região superior da seção é comprimido ao passo que o material na região inferior é estirado. Há dois tipos de esforços internos ocasionados por cargas transversais; são eles os esforços de cisalhamento que ocorrem paralelamente a cargas transversais e os esforços de cisalhamento que ocorrem perpendicularmente à direção do carregamento. Estes últimos provocam tensões compressivas na parte superior da viga e de tração na parte inferior, formando um par de

carregamentos de mesma magnitude e direções opostas. Tal par constitui um momento fletor que impede maiores deformações e assim caracteriza uma viga sujeita a flexão. A distribuição de esforços na viga pode ser avaliada de maneira exata mesmo quando certas hipóteses simplificadoras são utilizadas.

A análise de flexão simples em vigas é geralmente baseada na equação de flexão de Euler-Bernoulli. As condições que utilizamos no desenvolvimento da teoria são: (1) a viga está sob o efeito de **flexão pura**, porquanto a força de cisalhamento é nula e não ocorrem carregamentos torsionais ou axiais; (2) o material é isotrópico, homogêneo, linearmente elástico e, portanto, obedece a lei de Hooke; (3) a viga é inicialmente reta e tem seção transversal constante ao longo de todo o vão; e (4) para evitar a chamada 'flexão oblíqua,' supõe-se que a seção transversal da viga é simétrica relativamente a um plano que coincide com o plano de flexão.

Na teoria de Euler-Bernoulli para vigas esbeltas, a suposição 'seções planas continuam planas' é crucial. Assim sendo, não levamos em conta deformações causadas por cisalhamento da seção transversal.

A Figura 1 mostra parte de uma viga deformada com comprimento Δx . Por meio dessa ilustração, pode-se obter uma relação entre a flecha w na direção z e o raio de curvatura R da viga deformada. Se a posição da viga for quase horizontal – isto é, se $w'(x) \ll 1$ –, tem-se

$$w'(x) - w'(x + \Delta x) = \phi = \frac{\Delta x}{R(x + \xi \Delta x)} \quad (1)$$

onde ξ toma um valor no intervalo $0 \leq \xi \leq 1$. O valor de ξ não é conhecido, mas não será necessário conhecê-lo na discussão vindoura. O raio de curvatura em um ponto no vão da viga é dado como um valor-limite tal que

$$\frac{1}{R(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w'(x) - w'(x + \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (2)$$

Figura 1. Viga curvada com carga distribuída $q(x)$, momento de magnitude $M(x)$ e força transversal $T(x)$. $q(x)$ e a flecha $w(x)$ são positivos na direção do eixo z , isto é, para cima no plano da figura. O valor de ξ pertence ao intervalo $0 \leq \xi \leq 1$.

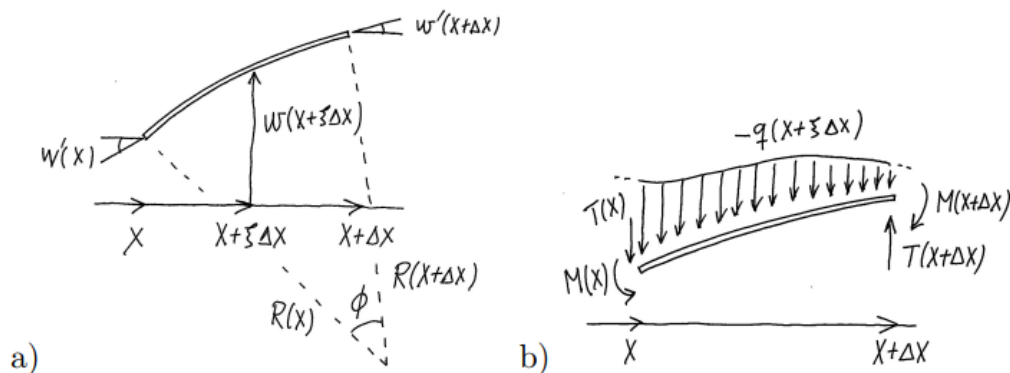
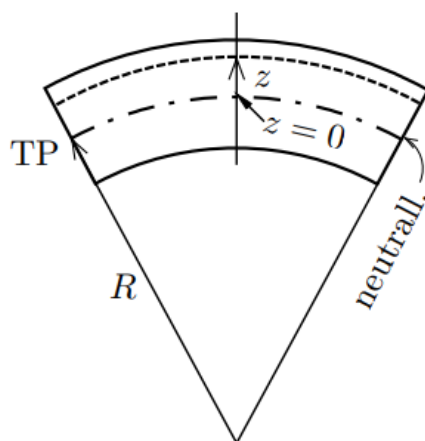


Figura 2. A linha neutra, que é formada pelos centroides das seções transversais, tem raio de curvatura R . A coordenada z é perpendicular à linha neutra, que define $z = 0$.



É fácil ver que a viga na Figura 1a está estirada em sua parte superior e comprimida na parte inferior. A Figura 2 mostra uma curva seção de viga que tem comprimento ℓ_x quando não deformada. A seção é tão curta que seu raio de curvatura pode ser suposto constante em todo o segmento. O plano de curvatura contém o eixo z . Para algum z pode-se encontrar um plano que não está estirado ou comprimido, isto é, para o qual tem-se deformação $\varepsilon_x = 0$. Esse plano é definido pela *linha neutra*. O plano em questão é por vezes chamado *plano neutro* ou *fibra neutra*. Sem perda de generalidade, podemos definir $z = 0$ na linha neutra. Um plano ao longo da viga que define um local geométrico equidistante do centro de curvatura é chamado de *fibra*. O raio de curvatura da linha neutra é denotado $R = R(x)$. O comprimento da linha neutra em $z = 0$ é $R\phi = L_x$, e é igual ao comprimento da seção não deformada da viga, uma vez que a linha neutra não apresenta deformação. Portanto, o comprimento L_x ao longo do plano deformado é dado por

$$L_x = (R + z)\phi \quad (3)$$

Mas antes da deformação o comprimento do mesmo plano era

$$\ell_x = R\phi \quad (4)$$

A deformação ao longo da viga é

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{L_x - \ell_x}{\ell_x} = \frac{z}{R(x)} \quad (5)$$

Mas a lei de Hooke indica que o esforço na viga é

$$\sigma_x(x, z) = E\varepsilon_x = E \frac{z}{R(x)} \quad (6)$$

A Figura 1b mostra um segmento de viga sob o efeito de uma carga distribuída $q = q(x)$. As forças laterais T e o momento M têm valores médios. Com o eixo z dirigido para cima e o eixo y no plano de flexão, em uma superfície com a normal externa na direção positiva do eixo x , T é voltado para a direção positiva do eixo z e M gira em torno do eixo y positivo. Em uma superfície com a normal externa na direção negativa do eixo x , T é voltado para a direção negativa do eixo z e M gira em torno do eixo y negativo. Para ambas as extremidades da viga, T age de modo que a viga inclina-se no sentido antihorário e M age de modo que a viga arqueie para cima, isto é, na direção do eixo z . O equilíbrio de momentos deve satisfazer

$$M(x + \Delta x) - T(x + \Delta x)\Delta x - M(x) + q(x + \xi\Delta x)\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (7)$$

onde os momentos são tomados relativamente à extremidade da viga em x . Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, obtém-se um valor-limite para $T(x)$,

$$T(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} = \frac{dM(x)}{dx} \quad (8)$$

Em seguida, o equilíbrio de forças é

$$T(x + \Delta x) + q(x + \xi\Delta x)\Delta x - T(x) = 0 \quad (9)$$

o que, fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, resulta em

$$q(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-T(x + \Delta x) + T(x)}{\Delta x} = -\frac{dT(x)}{dx} \quad (10)$$

Os esforços de tensão na parte superior da viga e compressão na parte inferior da viga flexionada com raio de curvatura positivo, como mostra a Figura 1, formam um par de forças opostas de mesma magnitude e direções opostas, de acordo com (6). A distribuição de esforços produz um momento fletor cuja intensidade pode ser calculada por integração sobre a área de seção transversal A , como segue,

$$M = \int \sigma_x z dA = \int E \frac{z}{R} z dA = EI \times \frac{1}{R} \quad (11)$$

O produto EI constitui a **rigidez à flexão** da viga e I é o momento de inércia da viga em relação ao eixo y . De fato, o momento de inércia em questão é dado por

$$I = \int z^2 dA \quad (12)$$

Valores de I podem ser encontrados em coleções de fórmulas para geometrias retangulares, triangulares, circulares, etc. Combinando os resultados (1), (11), (8) e (10), temos

$$-q(x) = \frac{dT(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right] \quad (13)$$

A equação (13) é a chamada **equação da linha elástica**. Esta pode ser solucionada com as condições de contorno a ela associadas; o número de condições de contorno é igual à ordem da equação. As condições de contorno são dadas em pares conhecidos como ‘condições de contorno naturais;’ os pares são M e T ; M e w ; T e w' ; ou w' e w . As combinações M e w' ou T e w não são incluídas, pois, embora possam ser utilizadas em uma análise, não são praticamente realizáveis. O par M e T constitui as ‘condições de contorno dinâmicas’ e o par w e w' constitui as ‘condições de contorno cinemáticas.’

A tensão na seção transversal é proporcional ao momento aplicado. Usando (6) e (11), obtém-se

$$\sigma_z = \frac{zM}{I} \quad (14)$$

Esse resultado é comumente escrito como

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \quad (15)$$

onde W é o **módulo de resistência**. Este pode ser calculado como

$$W = \frac{I}{z_{\max}} \quad (16)$$

ou extraído de uma coleção de fórmulas para cada tipo de seção.

▲ Termos importantes

- **Ren böjning** (“Flexão pura”): Regime de comportamento mecânico no qual uma viga encontra-se sob o efeito de esforços de flexão apenas; não há contribuições de cisalhamento, torção, ou quaisquer outras modalidades de carregamento.
- **Balkstyvheten** (“Rigidez à flexão”): Propriedade definida como o produto $E \times I$, onde E é o módulo de Young do material e I é o momento de inércia da seção do componente mecânico sob carregamento.
- **Elastika linjens ekvation** (“Equação da linha elástica”): Equação diferencial que descreve a resposta mecânica de uma viga sob flexão pura.
- **Böjmotståndet** (“Módulo de resistência”): Literalmente ‘resistência a flexão;’ trata-se da razão entre o momento de inércia I e a maior distância z_{\max} (por vezes denotada como c) da superfície neutra. A tensão máxima σ_m em uma viga sob flexão é inversamente proporcional ao módulo de resistência.

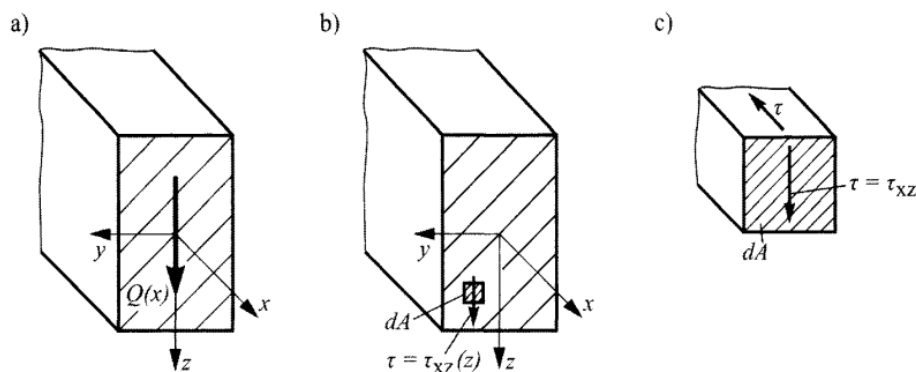
◆ 2. Schubspannungen beim Balken und bei balkenartigen Strukturen

↳ Referência 2 (Richard e Sander, 2006), pp. 112 – 119. Com modificações.

Bei vielen Belastungssituationen treten in Balken neben den Biegemomenten auch **Querkräfte** auf. Während die Biegemomente Normalspannungen in den Querschnitten dieser Strukturen erzeugen, führen die Querkräfte $Q(x)$ zu Schubspannungen. Diese sind in allgemeine konstant über Höhe des Querschnitts.

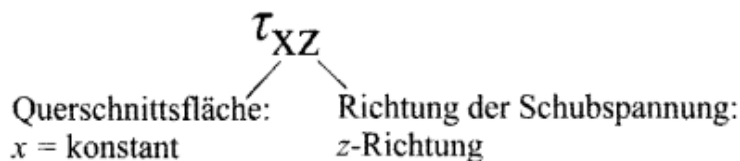
Für die Ermittlung der Schubspannungsverteilungen geht man von der im Balken herrschenden Querkraft $Q(x)$ aus, Bild 3. Die Querkraft ruft im Querschnitt eine Schubspannung $\tau = \tau_{xy}(z)$ hervor. Schubspannungen treten aus Gleichgewichtsgründen stets paarweise auf. Dies wird auch bei dem Volumenelement in Bild 3c deutlich. Die Verwendung der Indizes ist in Bild 4 verdeutlicht.

Bild 3. Ermittlung der Schubspannungen beim Balken und bei balkenartigen Strukturen
 (a) Balken oder Struktur mit der Querkraft $Q(x)$ im Querschnitt
 (b) Schubspannung $\tau = \tau_{xy}(z)$ an einem Flächenelement des Querschnitts.
 (c) Paarweises Auftreten der Schubspannungen an einem vergrößert dargestellten Volumen-element.



Die Schubspannungsverteilung im Querschnitt hängt in besonderer Weise von dem Querschnittsprofil ab. Daher werden nachfolgend verschiedene Querschnittsflächen betrachtet.

Bild 4. Balkenspannungsnotation.



2. Esforços de cisalhamento em vigas e estruturas semelhantes

Em muitas situações de carregamento mecânico, **forças de cisalhamento** atuam em conjunção com momentos fletores. Enquanto os momentos fletores produzem esforços normais na seção de uma estrutura, as forças transversais $Q(x)$ conduzem a esforços cortantes. Tais esforços são geralmente constantes ao longo da altura da seção transversal.

Para estabelecer a distribuição de esforços cortantes, deve-se recorrer à carga de cisalhamento $Q(x)$ imposta à viga, como ilustra a Figura 3a. A força transversal produz uma tensão $\tau = \tau_{xz}(z)$ na seção do membro (Fig. 3b). Para assegurar a existência de equilíbrio, forças de cisalhamento ocorrem em pares, como ilustra a Fig. 3c.

A Figura 4 esclarece a notação de índices utilizada para descrever esforços cortantes.

Figura 3. Determinação dos esforços de cisalhamento em vigas e estruturas similares.
 (a) Viga com carga de cisalhamento $Q(x)$ na seção transversal.
 (b) Esforço cortante $\tau = \tau_{xz}(z)$ em um elemento de superfície da seção transversal.
 (c) Par de esforços cortantes em um elemento de volume ampliado.

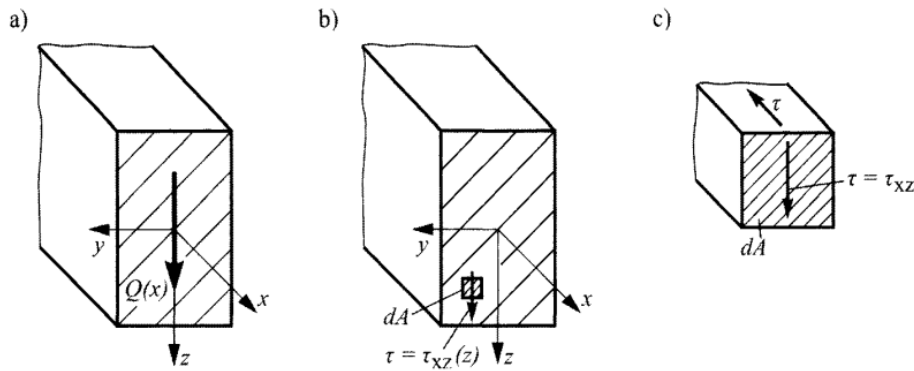
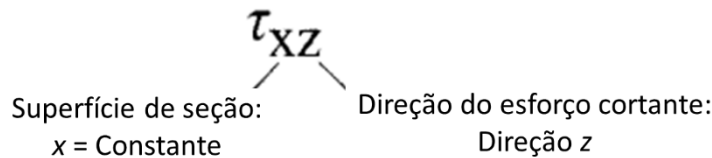


Figura 4. Notação de esforços de cisalhamento.



A distribuição de esforços cortantes é particularmente dependente do perfil de seção transversal. Alguns tipos de seção são considerados a seguir.

2.1. Balken mit Vollquerschnitt

Ist die Querkraft $Q(x)$ und die Funktion $b(z)$ für die Breite des Querschnitts bekannt, so lässt sich die Schubspannungsverteilung $\tau(z) = \tau_{xz}(z)$ mit der Beziehung

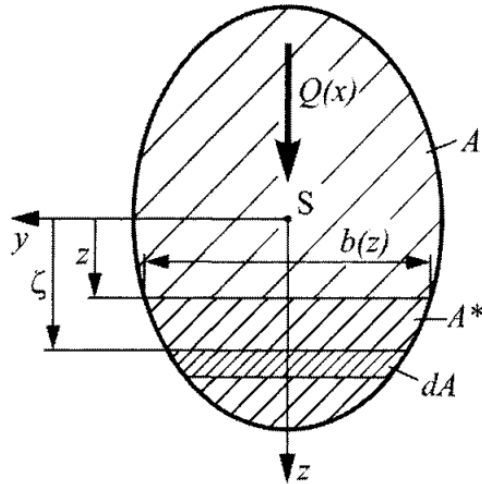
$$\tau(z) = \tau_{xz}(z) = \frac{Q(x)S_y(z)}{I_y b(z)} \quad (17)$$

$S_y(z)$ stellt hierbei das statische Moment der Teilfläche A^* bezüglich der y -Achse dar (Bild 5). Es lässt sich mit der Formel

$$S_y(z) = \int_{A^*} \zeta dA \quad (18)$$

berechnen. I_y ist bereits als axiales Flächenträgheitsmoment, bekannt.

Bild 5. Volquerschnitt eines Balkens oder einer balkenartigen Struktur mit der Querkraft $Q(x)$, den Koordinaten y, z und ζ sowie der Gesamtfläche A und den Teilflächen dA und A^* .



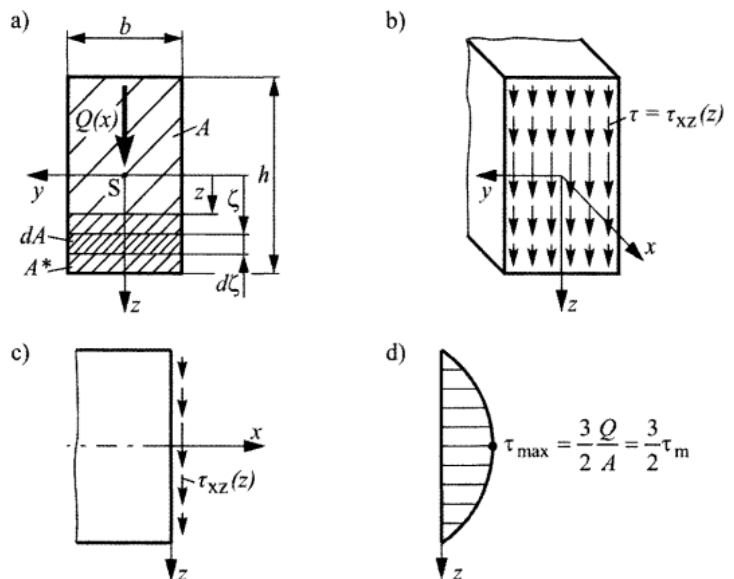
2.1.1. Rechteckquerschnitt

Für den Rechteckquerschnitt, Bild 6a, gilt $b(z) = b$, $A = b \times h$ und $I_y = b \times h^3/12$. $S_y(z)$ kann ermittelt werden:

$$S_y(z) = \int_{A^*} \zeta dA = \int_z^{h/2} \zeta \times b d\zeta = \frac{b}{2} \times \zeta^2 \Big|_{\zeta=z}^{h/2} = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (19)$$

Bild 6. Schubspannungen infolge der Querkraft beim Rechteckquerschnitt

- (a) Rechteckquerschnitt mit den Koordinaten und Teilflächen.
- (b) Schubspannungsverteilung $\tau = \tau_{xz}(z)$ im Querschnitt.
- (c) Seiteransicht mit Schubspannung im Balkenquerschnitt.
- (d) Verteilung der Schubspannungen über die Balkenhöhe mit der maximalen Schubspannung τ_{\max} .



Somit folgt mit Gleichung (6.2):

$$\tau(z) = \tau_{xz}(z) = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (20)$$

Diese Schubspannungverteilung ist in den Bildern 6b, 6c und 6d dargestellt. Am oberen und unteren Balkenrand, d.h. für $z = h/2$ ist $\tau(z)$ null. In der Mitte des Balkenquerschnitts, d.h. für $z = 0$, ist die Schubspannung maximal:

$$\tau_{\max} = \tau(z = 0) = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \frac{4 \times 0^2}{h^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{A} = \frac{3}{2} \tau_m \quad (21)$$

τ_{\max} is somit 1.5mal so groß wie die mittlere Schubspannung

$$\tau_m = \frac{Q(x)}{A} = \frac{Q(x)}{b \times h} \quad (22)$$

2.1.2. Kreisquerschnitt

Beim Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser d , Bild 7, ergibt sich die Schubspannungverteilung

$$\tau(z) = \tau_{xz}(z) = \frac{4}{3} \frac{Q(x)}{A} \left(1 - \frac{4z^2}{d^2} \right) \quad (23)$$

Somit ist die maximale Schubspannung

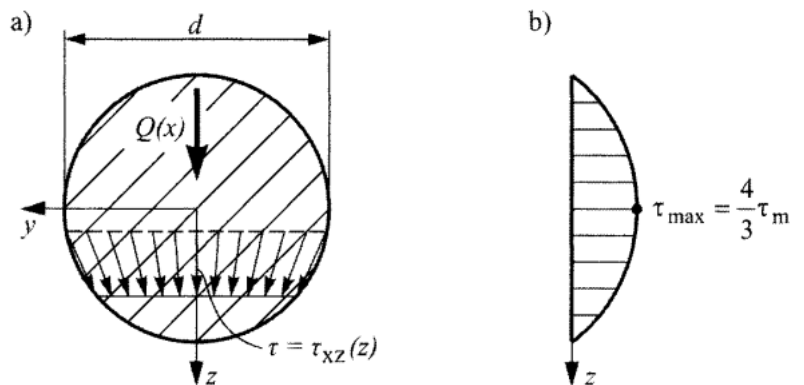
$$\tau_{\max} = \tau(z = 0) = \frac{4}{3} \frac{Q(x)}{A} = \frac{4}{3} \tau_m \quad (24)$$

mit $A = \pi \times d^2/4$.

Bild 7. Schubspannungsverteilung beim Kreisquerschnitt.

(a) Kreisquerschnitt mit Koordinaten und Abmessungen.

(b) Verteilung von τ entlang der z -Achse.



2.1. Vigas de seção completa

Se a força transversal $Q(x)$ e a função $b(z)$ que descreve a seção transversal forem conhecidos, a distribuição de esforços cortantes $\tau(z) = \tau_{xz}(z)$ pode ser calculada através da relação

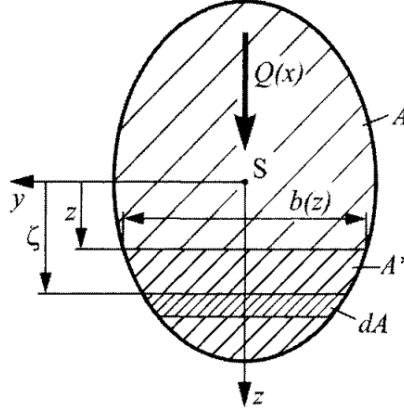
$$\tau(z) = \tau_{xz}(z) = \frac{Q(x) S_y(z)}{I_y b(z)} \quad (17)$$

onde $S_y(z)$ representa o momento estático da subárea A^* com relação ao eixo y (Figura 5). O momento em questão tem a forma

$$S_y(z) = \int_{A^*} \zeta dA \quad (18)$$

Ademais, I_y denota o momento de inércia/segundo momento de área.

Figura 5. Seção transversal de uma viga ou estrutura semelhante com força transversal $Q(x)$, coordenadas y , z e ζ , e elementos de área dA e A^* .



2.1.1. Seção retangular

Para uma seção retangular, Figura 6a, tem-se $b(z) = b$, $A = b \times h$ e $I_y = b \times h^3/12$. O valor do momento $S_y(z)$ pode ser determinado como:

$$S_y(z) = \int_{A^*} \zeta dA = \int_z^{h/2} \zeta \times b d\zeta = \frac{b}{2} \times \zeta^2 \Big|_{\zeta=z}^{h/2} = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (19)$$

A distribuição de esforços cortantes é então:

$$\tau(z) = \tau_{xz}(z) = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (20)$$

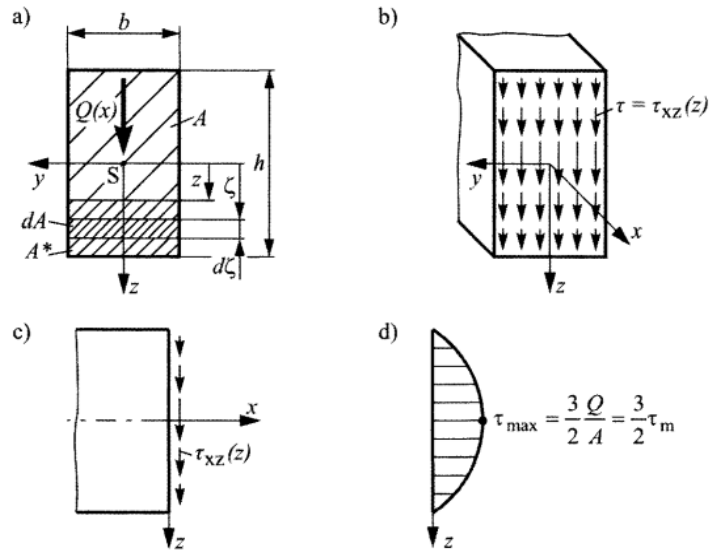
Essa distribuição de esforços é ilustrada nas Figs. 6b, 6c e 6d. Nas extremidades superior e inferior da seção, isto é, para $z = h/2$, $\tau(z)$ é nulo. A tensão é máxima no plano central da seção, isto é, para $z = 0$:

$$\tau_{\max} = \tau(z=0) = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \frac{4 \times 0^2}{h^2} \right) = \frac{3Q(x)}{2A} = \frac{3}{2} \tau_m \quad (21)$$

Vê-se que τ_{\max} é igual a 1.5 vezes a tensão de cisalhamento média τ_m , que é dada por

$$\tau_m = \frac{Q(x)}{A} = \frac{Q(x)}{b \times h} \quad (22)$$

Figura 6. Esforços de cisalhamento resultantes de forças cortantes em uma seção retangular. (a) Seção retangular com coordenadas e áreas parciais em evidência. (b) Distribuição de esforços $\tau = \tau_{xz}(z)$ na seção transversal. (c) Vista lateral com esforços cortantes na seção de viga. (d) Distribuição de esforços na altura da seção.



2.1.2. Seção circular

Para uma seção circular com diâmetro d , Figura 7, a distribuição de esforços cortantes é dada por:

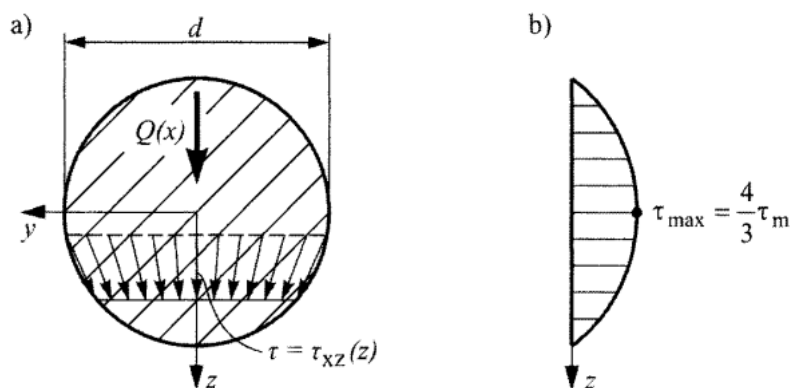
$$\tau(z) = \tau_{xz}(z) = \frac{4}{3} \frac{Q(x)}{A} \left(1 - \frac{4z^2}{d^2} \right) \quad (23)$$

de onde temos a tensão máxima

$$\tau_{\max} = \tau(z=0) = \frac{4}{3} \frac{Q(x)}{A} = \frac{4}{3} \tau_m \quad (24)$$

com $A = \pi \times d^2/4$.

Figura 7. Distribuição de esforços cortantes em uma seção circular. (a) Seção circular com coordenadas e dimensões. (b) Distribuição de τ ao longo do eixo z .



2.2. Dünnwandigen Profilen

Bei dünnwandigen Querschnittsprofilen unterscheidet man geschlossene und offene Profile. Wegen der kleineren Querschnittsfläche im Vergleich zu Vollquerschnitten hat die Schubbeanspruchung hier eine größere Bedeutung.

2.2.1. Kreisringquerschnitt

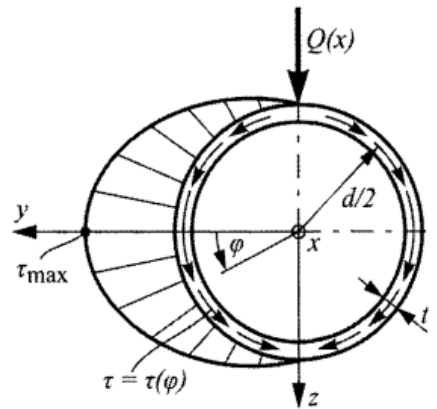
Für das dünnwandige Kreisringprofil, Bild 8, ergibt sich für $t \ll d$ die Schubspannungsverteilung

$$\tau = \tau(\varphi) = \frac{2Q(x)}{\pi dt} \cos(\varphi) \quad (25)$$

Die maximale Schubspannung beträgt

$$\tau_{\max} = \tau(\varphi = 0, \pi) = \frac{2Q(x)}{\pi dt} \quad (26)$$

Bild 8. Dünnwandiges Rohrprofil (Kreisringquerschnitt) mit der Schubspannungsverteilung $\tau = \tau(\varphi)$ und der maximalen Schubspannung τ_{\max} .



2.2.2. I- Profil

Für das dünnwandige I-Profil, Bild 9, ergeben sich für $t = t_1 = t_2$ folgende Schubspannungen an ausgewählten Stellen im Profil:

$$\tau_1 = \frac{Q(x) \times b \times (h - t)}{4I_y} \quad (27)$$

$$\tau_2 = \frac{Q(x) \times b \times (h - t)}{2I_y} \quad (28)$$

$$\tau_3 = \tau_{\max} = \frac{Q(x)}{2I_y} \left[b(h - t) + \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] \quad (29)$$

Bild 9. I-Profil mit den Querschnittsabmessungen und Schubspannungsverteilung entlang des Ober- und Untergurt sowie des Steges.

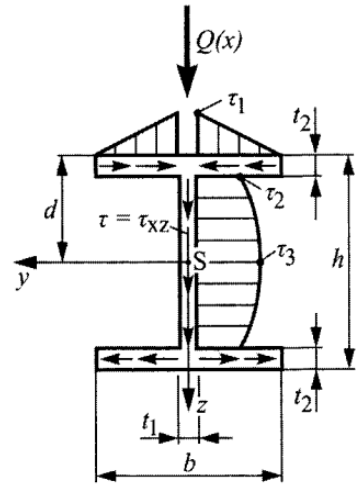
2.2.3. U-Profil

Die Schubspannungen an markanten Stellen das U-Profiles, Bild 10, lassen sich für $t = t_1 = t_2$ wie folgt berechnen:

$$\tau_1 = \frac{Q(x) \times b \times (h-t)}{2I_y} \quad (30)$$

$$\tau_2 = \frac{Q(x) \times b \times (h-t)}{2I_y} \quad (31)$$

$$\tau_3 = \frac{Q(x)}{2I_y} \left[b(h-t) + \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] \quad (32)$$



den

Bei diesem U-Profil, wie bei einigen anderen offenen Profilen, erzeugen die Schubspannungen ein Moment (Torsionsmoment) um die Schwerpunktschwerachse (Balkenlängsachse) x. Torsionsfreie Biegung ist nur möglich, wenn die äußere Kraft F im Schubmittelpunkt SM des Querschnittsprofils angreift, siehe Bild 11.

Bild 10. U-profil.

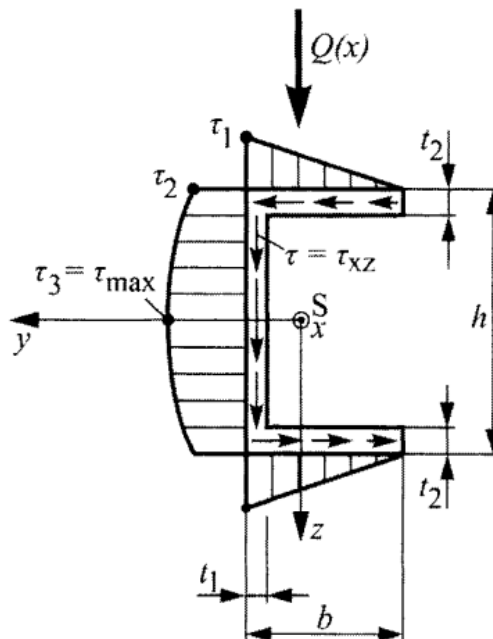
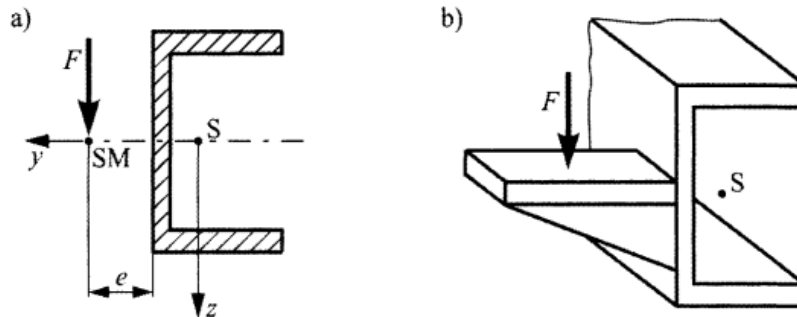


Bild 11. Vermeidung von Torsion bei Schbeanspruchung von Balken. (a) U-Profil mit Angriffspunkt der äußeren Kraft F im Schubmittelpunkt SM . (b) Praktische Realisierung der Krafteinleitung mit einer Konsole.



2.2. Perfis de paredes finas

Aqui, deve-se distinguir entre perfis de paredes finas fechados e abertos. Em vista da menor área de seção, a tensão de cisalhamento é particularmente importante para vigas de paredes finas.

2.2.1. Seção transversal de anel circular

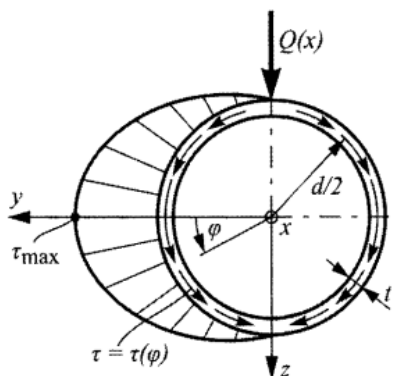
Para o perfil de anel circular, Figura 8, supondo que a espessura t é muito menor que o diâmetro d , tem-se a distribuição de esforços dada por

$$\tau = \tau(\varphi) = \frac{2Q(x)}{\pi dt} \cos(\varphi) \quad (25)$$

A tensão de cisalhamento máxima é dada por

$$\tau_{\max} = \tau(\varphi = 0, \pi) = \frac{2Q(x)}{\pi dt} \quad (26)$$

Figura 8. Perfil de anel circular de paredes finas com a distribuição de esforços cortantes $\tau = \tau(\varphi)$ e tensão máxima τ_{\max} .



2.2.2. Perfil I

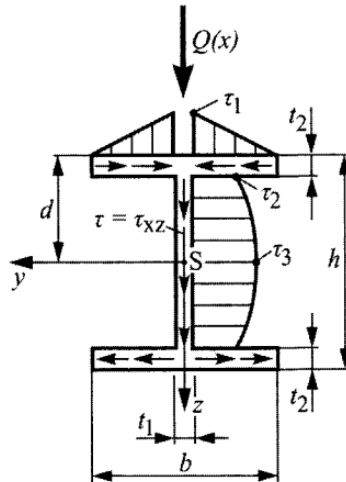
Para um perfil I, supondo as espessuras $t_1 = t_2 = t$ (Figura 9), as tensões de cisalhamento nos três segmentos da viga são dadas por (27) - (29):

$$\tau_1 = \frac{Q(x) \times b \times (h-t)}{4I_y} \quad (27)$$

$$\tau_2 = \frac{Q(x) \times b \times (h-t)}{2I_y} \quad (28)$$

$$\tau_3 = \tau_{\max} = \frac{Q(x)}{2I_y} \left[b(h-t) + \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] \quad (29)$$

Figura 9. Perfil I com a distribuição de esforços cortantes nos banzos e na alma da seção.



2.2.3. Perfil U

Para um perfil U, supondo as espessuras $t_1 = t_2 = t$ (Figura 10), as tensões de cisalhamento nos três segmentos da viga são dadas por (30) - (32):

$$\tau_1 = \frac{Q(x) \times b \times (h-t)}{2I_y} \quad (30)$$

$$\tau_2 = \frac{Q(x) \times b \times (h-t)}{2I_y} \quad (31)$$

$$\tau_3 = \frac{Q(x)}{2I_y} \left[b(h-t) + \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] \quad (32)$$

Em um perfil U , como no caso de alguns outros perfis abertos, as tensões de cisalhamento são acompanhadas de um momento de torção com relação ao eixo centroidal da seção. Flexão livre de torção só é possível se a carga externa F atuar sobre o centro de cisalhamento SM da seção (Figura 11).

Bild 10. Perfil U .

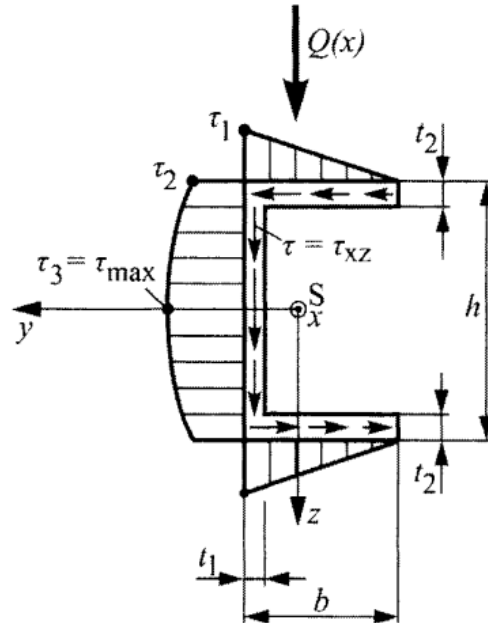
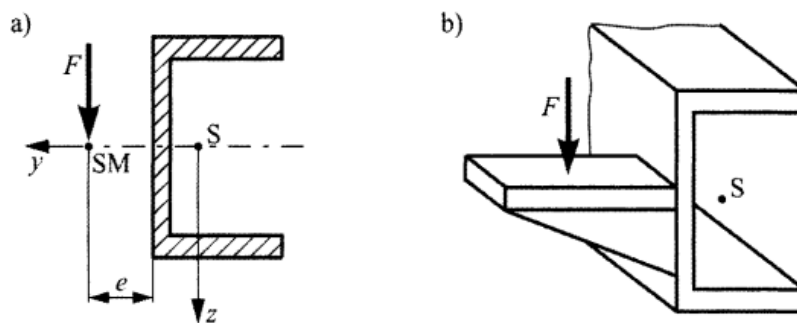


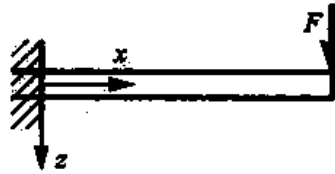
Bild 11. Evitando torção em uma viga sob o efeito de esforços cortantes. (a) Perfil U com força externa F aplicada ao longo do centro de cisalhamento SM . (b) Implementação prática com um console.



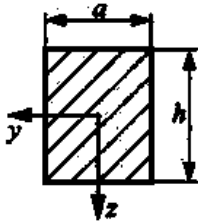
2.3. Beispiel

Ein einseitig eingespannter Stahlträger ist durch eine Kraft F belastet. Berechnen Sie die maximalen Schubspannungen für die vier unterschiedlichen Querschnittsprofile, bei denen das Flächenträgheitsmoment I_y und somit die maximale Durchbiegung gleich ist.

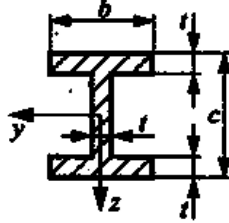
Geg.: $F = 100 \text{ kN}$, $a = 60 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$, $b = 68.7 \text{ mm}$, $c = 120 \text{ mm}$, $t = 10 \text{ mm}$, $D = 100.5 \text{ mm}$, $d = 145.9 \text{ mm}$, $f = 4.1 \text{ mm}$.



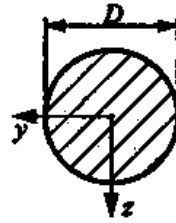
Profil 1:



Profil 2:



Profil 3:



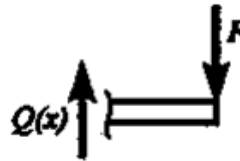
Profil 4:



Bestimmung der Querkraft.

$$F - Q(x) = 0$$

$$\therefore Q(x) = F = 100 \text{ kN} = 100,000 \text{ N}$$



Maximale Schubspannungen.

Profil 1. Mit $F = 100 \text{ kN}$, $a = 60 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$,

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q(x)}{2 A} = \frac{3}{2} \times \frac{F}{a \times h} = \frac{3}{2} \times \frac{100,000}{60 \times 100} = \boxed{25 \text{ N/mm}^2}$$

Profil 2. Mit $b = 68.7 \text{ mm}$, $c = 120 \text{ mm}$, $t = 10 \text{ mm}$,

$$I_y = \frac{t(c-2t)^3}{12} + 2 \left[\frac{bt^3}{12} + \left(\frac{c-t}{2} \right)^2 bt \right]$$

$$\therefore I_y = \frac{10 \times (120 - 2 \times 10)^3}{12} + 2 \times \left[\frac{68.7 \times 10^3}{12} + \left(\frac{120 - 10}{2} \right)^2 \times 68.7 \times 10 \right] = 5.00 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q(x)}{2I_y} \left[b(c-t) + \left(\frac{c}{2} - t \right)^2 \right] = \frac{100,000}{2 \times (5.00 \times 10^6)} \times \left[68.7 \times (120 - 10) + \left(\frac{120}{2} - 10 \right)^2 \right]$$

$$\therefore \boxed{\tau_{\max} = 100.6 \text{ N/mm}^2}$$

Perfil 3. Mit $F = 100 \text{ kN}$, $D = 100.5 \text{ mm}$,

$$\tau_{\max} = \frac{4 Q(x)}{3 A} = \frac{4}{3} \times \frac{F}{\left(\pi D^2/4\right)} = \frac{4}{3} \times \frac{100,000}{\left(\pi \times 100.5^2/4\right)} = \boxed{16.81 \text{ N/mm}^2}$$

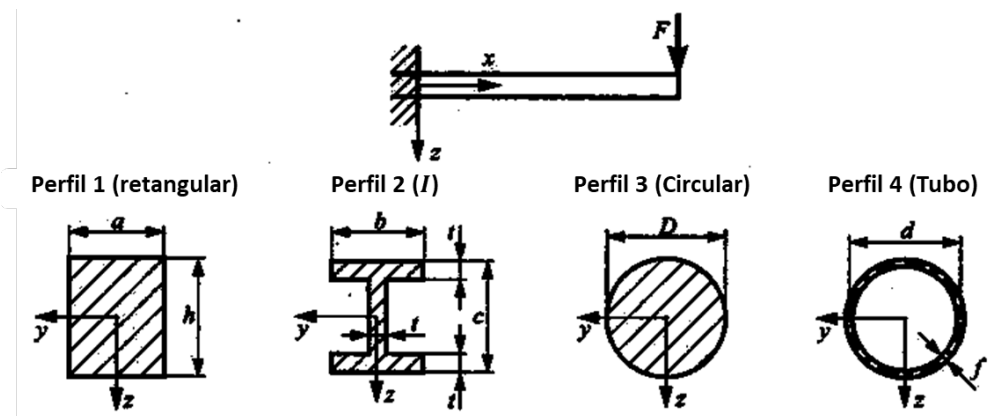
Perfil 4. Mit $d = 145.9 \text{ mm}$, $f = 4.1 \text{ mm}$,

$$\tau_{\max} = \frac{2 Q(x)}{\pi df} = \frac{2}{\pi} \times \frac{100,000}{145.9 \times 4.1} = \boxed{106.4 \text{ N/mm}^2}$$

2.3. Exemplo

Uma viga de aço cantilever está sob o efeito de uma força F . Para os quatro perfis de seção transversal ilustrados a seguir, calcule as tensões de cisalhamento máximas, as quais ocorrem onde o momento de inércia (I_y) é máximo e, portanto, a deflexão é máxima.

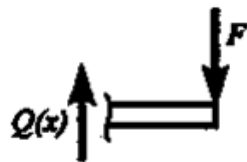
Dados: $F = 100 \text{ kN}$, $a = 60 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$, $b = 68.7 \text{ mm}$, $c = 120 \text{ mm}$, $t = 10 \text{ mm}$, $D = 100.5 \text{ mm}$, $d = 145.9 \text{ mm}$, $f = 4.1 \text{ mm}$.



Determinando a carga $Q(x)$.

$$F - Q(x) = 0$$

$$\therefore Q(x) = F = 100 \text{ kN} = 100,000 \text{ N}$$



Esforços cortantes máximos.

Perfil 1. Com $F = 100 \text{ kN}$, $a = 60 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$,

$$\tau_{\max} = \frac{3 Q(x)}{2 A} = \frac{3}{2} \times \frac{F}{a \times h} = \frac{3}{2} \times \frac{100,000}{60 \times 100} = \boxed{25 \text{ N/mm}^2}$$

Perfil 2. Com $b = 68.7$ mm, $c = 120$ mm, $t = 10$ mm,

$$I_y = \frac{t(c-2t)^3}{12} + 2 \left[\frac{bt^3}{12} + \left(\frac{c-t}{2} \right)^2 bt \right]$$

$$\therefore I_y = \frac{10 \times (120 - 2 \times 10)^3}{12} + 2 \times \left[\frac{68.7 \times 10^3}{12} + \left(\frac{120 - 10}{2} \right)^2 \times 68.7 \times 10 \right] = 5.00 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q(x)}{2I_y} \left[b(c-t) + \left(\frac{c}{2} - t \right)^2 \right] = \frac{100,000}{2 \times (5.00 \times 10^6)} \times \left[68.7 \times (120 - 10) + \left(\frac{120}{2} - 10 \right)^2 \right]$$

$$\therefore \boxed{\tau_{\max} = 100.6 \text{ N/mm}^2}$$

Perfil 3. Com $F = 100$ kN, $D = 100.5$ mm,

$$\tau_{\max} = \frac{4 Q(x)}{3 A} = \frac{4}{3} \times \frac{F}{(\pi D^2/4)} = \frac{4}{3} \times \frac{100,000}{(\pi \times 100.5^2/4)} = \boxed{16.81 \text{ N/mm}^2}$$

Perfil 4. Com $d = 145.9$ mm, $f = 4.1$ mm,

$$\tau_{\max} = \frac{2 Q(x)}{\pi df} = \frac{2}{\pi} \times \frac{100,000}{145.9 \times 4.1} = \boxed{106.4 \text{ N/mm}^2}$$



A **Lotka** oferece uma variedade de serviços de tradução, revisão e composição.

www.lotkatranslation.com



Tradução técnica

Traduzimos artigos, manuscritos e outros gêneros textuais em 8 idiomas.



Revisão técnica

Melhoramos a qualidade gramatical e estilística do seu documento.



Jargão e terminologia

Dominamos as terminologias e jargões de diversas áreas de engenharia e ciências naturais.



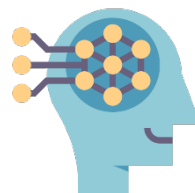
Edição de referências bibliográficas

Preparamos listas de referências em 4 padrões diferentes (ABNT, Harvard, APA, MLA)



Edição de expressões matemáticas

Preparamos as equações, reações químicas, tabelas e outros elementos especiais do seu documento.



Revisão de documentos gerados por inteligência artificial

Tecnologias de inteligência artificial generativa são ainda incipientes e propensas a erro. A Lotka pode melhorar a qualidade técnica de textos gerados ou traduzidos por IA.